# 《博士数学通讯》

第四期

博士家园出品

# 《博士数学通讯》

## 第四期

目录

一、数学新闻

1.1　受邀将在 2014 国际数学家大会报告的大陆高校校友

1.2　2014 年沃尔夫奖揭晓，Sarnak 教授获数学奖

二、学习经验 (SCIbird 十三篇)

2.1　重视反例

2.2　猜想与形式推导

2.3　谈谈数学中的构造方法

2.4　硬算是门基本功

2.5　多读一些著名定理

2.6　发掘几何直观

2.7　类比是一种重要的数学思维

2.8　学数学要有逆向思维

2.9　数学分析三大基本思想之逼近

2.10 数学分析三大基本思想之变换

2.11 数学分析三大基本思想之分解

2.12 抓住问题的核心

2.13 数学的联系与统一性

三、十年风雨

3.1 《博士数学论坛》风雨十年路——站长内心感悟

编辑委员

博士数学论坛

编委：SCIbird

主编：呼呼

本刊免费不定期发行，主要集结最新的数学新闻，学习经验，数学家，难题解析等。

欢迎投稿：

Email：

www@math .org.cn

# 受邀将在 2014 国际数学家大会报告的大陆高校校友

国际数学家大会( International Congress of Mathematicians ,简称 ICM ）是由国际数学联盟（IMU）主办的全球性数学学术会议。会议的主要内容是进行学术交流，并在开幕式上颁发菲尔兹奖（1936 年起）、奈望林纳奖（1982 年起）、高斯奖（2006 年起）和陈省身奖（2010 年起）。首届国际数学家大会于 1897 年在瑞士苏黎世举行，1900 年巴黎大会之后每四年举行一次。除两次世界大战的影响外，国际数学家大会从未中断，2002 年在中国北京举行了第 24 届大会，2014 年第 27 届大会将在韩国首尔举行。每次大会一般都邀请一批杰出数学家分别在大会上作一小时的学术报告和学科组的分组会上作 45 分钟学术报告。

国际数学家大会自 1897 年至 2010 年的 113 年间共主办 26 届，其中有 14 届出现过做邀请报告的华人学者身影，在历届大会中做报告的科大校友有：华罗庚( 1958 年主持创立中国科大数学系，并任中国科大副校长兼数学系主任)、吴文俊（1958 年--1970 年担任中国科大数学系副主任）、马志明（1981 年中国科大研究生院（北京）硕士毕业）、严加安（591）、李岩岩（771）、陈秀雄（821）、鄂维南（781）、邵启满（881 博）等。其中，李岩岩（771）、鄂维南（781）与本次受邀的舒其望（771）、袁亚湘（82 硕）共同于 2012 年 11 月当选美国数学学会（American Mathematical Society，简称 AMS）首届会士。

网址参见：http://www.icm2014.org/en/program/scientific/section

Yitang Zhang, University of New Hampshire, USA

张益唐（北京大学本硕，Purdue 博）

Fuquan Fang, Capital Normal University, China

方复全（华中科技大学本科，吉林大学博）

Tao Li, Boston College, USA

李涛（北京大学本科，Caltech 博）

Weixiao Shen, National University Singapore, Singapore

沈维孝（中国科技大学本科，东京大学博）

Juncheng Wei, Chinese University of Hong Kong, Hong Kong

魏军城（武汉大学本科，Minnesota 博）

Chi-Wang Shu, Brown University, USA

舒其望（中国科技大学本科，UCLA 博）

Ya-xiang Yuan, Chinese Academy of Sciences, China

袁亚湘（湘潭大学本科，中科院硕，剑桥博）

Jiongmin Yong, University of Central Florida, USA

雍炯敏（复旦大学本科，Purdue 硕博）

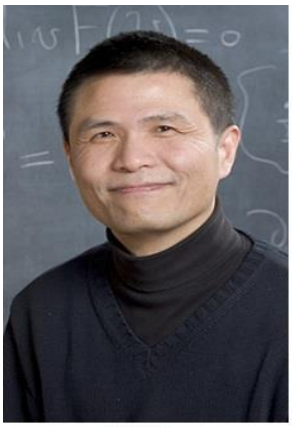
Weizhu Bao, National University of Singapore, Singapore

包维柱（清华大学本硕博）

Han Qi, Chinese Academy of Sciences, China

韩琦（浙江丝绸工学院本科，中国科技大学硕，中科院博）

Man Keung Siu, University of Hong Kong, Hong Kong



舒其望

袁亚湘

韩琦

沈维孝

中国科技大学 4（2 个本科校友，2 个硕士校友）

北京大学 2（1 个本科硕士校友，1 个本科校友）

清华大学 1（本科硕士校友）

华中科技大学 1（本科校友）

复旦大学 1（本科校友）

武汉大学 1（本科校友）

湘潭大学 1（本科校友）

浙江丝绸工业学院 1（本科校友）

吉林大学（硕士校友）

# 2014 年沃尔夫奖揭晓，Sarnak 教授获数学奖

2014 年沃尔夫奖获奖名单现已出炉。

今年沃尔夫奖共颁发五个奖项，来自台湾地区、美国、瑞典、加拿大和丹麦的七名科学家和一名艺术家获此殊荣。其中

**数学奖**

**Peter Sarnak，美国普林斯顿高级研究所教授；**

彼得•萨奈克教授是世界权威数学家，在数论及相关交叉学科取得了杰出成就，获得了广泛赞誉。他的工作涉及数学学科的多个不同领域，体现了深刻的原创性思想，为现代数论和自守形式理论作出了重要贡献。作为知名的社会活动家

和教育家，彼得·萨奈克对国际数学的教育、普及和发展倾注了极大的热情，对中国数学学科建设给予了特别的帮助和支持。

彼得•萨奈克，美国普林斯顿高等研究院、普林斯顿大学教授，美国国家科学院院士，美国艺术与科学研究院院士，美国哲学学会会员，英国皇家学会会员，邵逸夫奖数学科学奖遴选委员会主席，担任《Annals of Mathematics》等多个国际权威期刊编委，曾获得美国数学会福特奖、美国数学会柯尔奖、瑞士奥斯特洛斯基奖等荣誉。

始创于 1976 年的沃尔夫奖是国际最高学术大奖之一，由以色列的沃尔夫基金会颁发，在科学（农业、化学、数学、医学、物理）和艺术（音乐）领域授奖，

每个奖项奖金为 10 万美元。至今，共有 23 个国家的 280 人获得沃尔夫奖，其中华人科学家吴健雄获得 1978 年沃尔夫物理学奖、陈省身获得 1983 年沃尔夫数学奖、袁隆平获得 2004 年沃尔夫农业奖，钱永健获得 2004 年沃尔夫医学奖、丘成桐获得 2010 年沃尔夫数学奖，邓青云获得 2011 年沃尔夫化学奖。值得一提的是，沃尔夫奖在科学领域的三分之一获奖者后来都获得了诺贝尔奖。

# 重视反例

***SCIbird***

**说明：建议所有读者将本文中提及的那些著名分析反例，亲自动手推导一遍。**

本文是自己几年前的网上长文《如何提高自身数学水平》的扩展文章，重点介绍数学中的反例。

反例是数学中的重要组成部分，但在教学中因为某些原因被低估了，原因或者因为有的反例证明太难（所用数学工具较深），或者是纯粹技巧性的构造（没有一般性），甚至或者认为“破坏”了数学的和谐性等等。

按笔者观点，反例属于数学中的“否定性定理”范畴，可能在某种程度上限制了我们认识数学的边界。但换一个角度讲，很多反例的存在使得数学多了层次性，反而激发了活力，打开了一个新的世界，比如：连续函数--光滑函数--解析函数。

最有名的反例之一要数“单位正方形的对角线长度不能表示成两个正整数之比”了，即$\sqrt{2}$是无理数，这个反例引发了无理数井喷。如果耐心一些，细数数学分析教材（如《数学分析新讲》）中的反例，还是挺多的。

简单一点的反例，如举出一个光滑函数，不存在泰勒级数，这个反例是函数：$f(x)=e^{-1/x}$ ,$x>0$; $f(x)=0$ ,$x\le 0$. 这个函数在$x=0$点的任意阶导数均为 **0**，因此 这个函数在$x=0$点的泰勒级数恒为 **0**，矛盾。

其它例子，如直观上，收敛的广义积分

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx<\infty \quad \text{似乎应该有} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

如果$f(x)$非负，则结论成立；如果$f(x)$变号，则不一定成立，如$f(x)=\sin x^2$.

级数方面，众所周知的结论是$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$，但是$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}<+\infty$, $p>1$. 于是

猜想：对正项级数，当$a_n=o(\frac{1}{n})$，是否有级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$. 直观上，似乎是对

的，但是级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}=+\infty$就是这个猜想的反例。

上述几个例子都是与直观相违背的，这梯形我们在学习数学中不能丢弃直观思维的启发，但直观想象不能代替严格的数学证明，想当然的习惯要不得。

可能有朋友还是有这种感觉，上面的例子还是有些做做，似乎是 **show** 技巧。其实，随着学习的深入，特别是从一个高的视角“重温微积分”时，会有新的感悟和发现。**重温则不能再走老路，必须注入新的想法。**

比如，泰勒级数那个反例引发了解析函数的概念（参考复变函数教材），反例中$x=0$是函数$f(x)$的本性奇点，很多重要理论就是围绕奇点展开的。

通过广义积分来研究$f(x)$的渐进性质，属于 **Tauber** 型理论范畴，这是一个巧妙的想法（通过函数$f$的线性变换$Tf$来研究函数$f$的渐进性质）。举一个例子，这方面有一个定理：

**设$t\geq 0$，$f(t)$是有界的局部可积函数，定义函数**

$$g(z)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-zt}\,dt\ \ (\mathrm{Re}(z)>0)$$

**若函数$g(z)$可以解析延拓到$\mathrm{Re}(z)\geq 0$，则广义积分收敛且满足**

$$g(0)=\lim_{z\to 0+}\int_0^{+\infty}f(t)e^{-zt}\,dt=\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$$

显然，上面定理中的线性变换是 **Laplace** 变换。这个定理看似就像一道复变函数习题。其实这个定理是证明**素数定理**的最困难部分，这方面的细节见美国数学月刊文章

**Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem**

**D. Zagier**

记$\pi(x)$表示不超过$x$的素数的个数，所谓素数定理，指下面极限表达式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x}=1$$

这一定理最早由数学家高斯和勒让德猜出结果，但没有给出证明。俄国数学家切比雪夫通过引入函数

$$\vartheta(x)=\sum_{p\le x}\ln p$$

（这里 $p$ 表示素数）证明了如果 $\vartheta(x)\sim x$ 存在（即 $\lim\vartheta(x)/x=1$），则素数定理成立。后人证明极限 $\lim\vartheta(x)/x=1$ 存在，所使用的方法就是证明广义积分

$$\int_1^{\infty}\frac{\vartheta(x)-x}{x^2}\,dx$$

收敛。令 $f(t)=\vartheta(e^t)e^{-t}-1$，转化为证明广义积分

$$\int_1^{\infty}\frac{\vartheta(x)-x}{x^2}\,dx=\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$$

收敛。具体细节即利用上面的 **Tauber** 型定理，同时还涉及到黎曼 $\zeta(s)$ 函数的一些基本性质，此处从略（证明过程见美国数学月刊那篇文章）。

上面说的远一些，不过皆在说明，如何从更高的观点看待数学中的那些反例。还是说一些熟悉的例子吧，先说说狄利克雷函数

$$D(x)=1\ ,x\in\mathrm{Q}\,;D(x)=0\ ,x\in\mathrm{R}-\mathrm{Q}$$

将 $D(x)$ 限制在区间 $[0,1]$ 上就是一个著名的黎曼不可积函数的反例。

换一个角度看待这个反例。因为有理数可数，将区间 $[0,1]$ 上的有理数编号为 $q_1,q_2,q_3,\cdots$，构造函数列

$$D_n(x)=\begin{cases}1, & x=q_1,q_2,q_3,\cdots,q_n\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

显然函数列 $D_n(x)$ 是 $[0,1]$ 上的黎曼可积函数，积分值为 **0** 且 $D_n(x)\to D(x)$．于是可大胆猜想，用下面的极限来定义 $D(x)$ 的新的积分：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 D_n(x)\,dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}D_n(x)\,dx=:\int_0^1 D(x)\,dx$$

当然，这里选用区间 $[0,1]$ 比较整齐，对于一般的点集 $E$（需要引入测度），推广阶梯函数到简单函数，然后用其极限来定义 **Lebesgue** 积分，这是一种思路。

不做一般化讨论，对单个例子 $D(x)$，直接用黎曼积分的极限来定义即可。细心发现这里的关键在于**“极限与积分符号交换运算次序”**，这个性质太重要了。这个反例告诉我们在黎曼积分意义下，极限与积分符号未必可以交换顺序，即便可以交换，也未必相等。

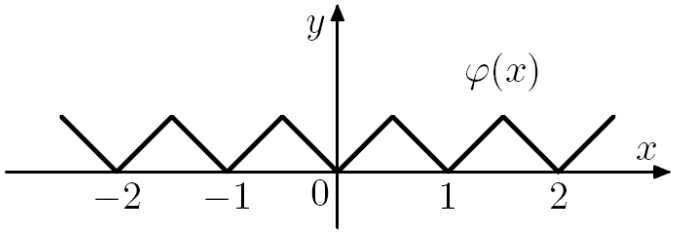
这个问题与之后的对级数是否可以逐项积分是等价的，都是重要问题。数

学分析教材是通过引入一致收敛概念来解决的，更一般的结论是 **Lebesgue** 控制收敛定理（当然要用 **Lebesgue** 积分了）。花费这么多笔墨，无非想说明如此重温狄利克雷函数 $D(x)$ 反例，可以温故而知新。

其它著名的反例，如《新讲》中的反例，这个反例否定了人们对连续函数在只有少数点不可导的直观猜想。

反例构造如下：记 $\varphi(x)$ 表示 $x$ 与离它最近整数的距离，则 $\varphi(x+1)=\varphi(x)$.

动手画画图，发现这是一个“锯齿函数”




令 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(4^n x)}{4^n}$ $x\in\mathrm{R}$，此函数一致收敛，故为连续函数，这个函数处处连续处处不可导。这里不去讨论具体细节（见《新讲》第三册），给出一个直观描述：随着 $n$ 的不断增大，锯齿函数 $\varphi(4^n x)$ 不断加密，而这些锯齿函数的叠加就“更锯齿”了（多画画图）。其实，分形几何中有名的雪花曲线，也是这方面的反例。

换一个角度，人们之前为什么没有认识到“处处连续处处不可导函数”的存在呢？一种想法是，通常人们受直观影响，想象中的函数都是分段单调的。而**“处处连续处处不可导函数”是无处单调的连续函数**。证明很简单，根据实变函数中的定理：单调函数几乎处处可导。利用泛函分析中的贝尔“纲定理”，可知道在连续函数中，**处处连续处处不可导函数**”占绝大多数。这一惊人结论堪比，超越数比代数数多得的的结论。

《新讲》中还给出了填满正方形的皮亚诺曲线，直圆柱的内接折面面积可以任意大（对比下曲线内接折线，可知这个反例很出乎意料），等反例，这里不一一介绍了。

最后，在说一个不那么初等的反例吧。这个反例太有名了，以至于数学系大三水平都应该知道-----她就是传说中的“米尔诺 7 维怪球”，是微分拓扑学建立的标志。

陈省身老爷子在《微分几何讲义》中给出了米尔诺最初的反例构造方法，不过太过于拓扑技巧化，这里采用后人发现的更简单而深刻的 **7** 维怪球反例，大致方法如下：

约定如下讨论的流形都是紧致可定向的。根据 **Thom** 的工作，设 $M^7$ 是一个闭 **7** 维流形，则存在某个 **8** 维流形 $B^8$，以 $M^7$ 为其边界，即 $M^7=\partial B^8$. 应该指出，满足 $M^7=\partial B^8$ 的 $B^8$ 不唯一。

米尔诺利用上述结论，并结合示性类理论和符号差定理，对 $M^7$ 巧妙定义了一个 $\bmod 7$ 整数**微分同胚不变量** $\lambda(M^7)$。这里在 $\bmod 7$ 意义下，$\lambda(M^7)$ 不依赖于 $B^8$ 的具体选取，故为 $M^7$ 的微分同胚不变量。

对于标准的 **7** 维球面 $S^7$，有 $\lambda(S^7)=0$。米尔诺构造了这样一个 **7** 维流形 $M^7$，它同胚于标准球面 $S^7$，但是 $\lambda(M^7)\neq 0$. 于是利用反证法可知这个“**7** 维怪球 $M^7$”不微分同胚于标准球面 $S^7$. 在拓扑等价意义下，也称标准球面 $S^7$ 上具有奇异微分结构。

**7** 维怪球的构造：定义解析函数：

$$f(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5)=z_1^5+z_2^3+z_3^2+z_4^2+z_5^2\ ,\ z_i\in\mathbf{C}$$

方程 $f(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5)=0$ 的解集确定了一个通过原点的 **8** 维超曲面 $M^8\subset\mathbf{C}^5$. 再设 $S^9:|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2+|z_5|^2=1$ 为标准的 **9** 维单位球面。

最后，令 $K^7=M^8\cap S^9$，拓扑上可以证明 $M^8$ 与 $S^9$ 横截相交，于是 $K^7$ 是一个 **7** 维光滑流形。进一步证明光滑流形 $K^7$ 满足：$K^7$ 同胚于标准球面 $S^7$，但是 $\lambda(K^7)\neq 0$.

上述例子与米尔诺原始论文中的例子等价（微分同胚），但要简单和深刻的多。深入研究发现，超曲面 $M^8$ 不是处处光滑的，它在原点 $O\in\mathbf{C}^5$ 有一个孤立奇点（偏导数等于 **0**），正是这个奇点导致了 $K^7=M^8\cap S^9$ 的怪异性（具有怪异微分结构）。**这个例子也说明了超曲面奇点附近的拓扑结构非常奇妙，后来发展出了所谓的“奇点理论”。**

上述工作是几何（拓扑）与分析结合的典范。进一步研究发现，标准球面 $S^7$ 共有 **28** 种互不相容的微分结构，这 **28** 种怪球可表示如下：

$$\sum(6r-1,3,2,2,2):\ z_1^{6r-1}+z_2^3+z_3^2+z_4^2+z_5^2=0\cap S^9$$

其中，$r=1,2,3,\cdots,28$．显然 $K^7=\sum(5,3,2,2,2)$．

在 7 维怪球上发现了怪异微分结构之后，人们继续研究其它维数的怪球有无微分结构。如果有，有多少种？目前这方面工作可见下表：

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathscr{S}_n$ | 1 | 1 | 1 | ? | 1 | 1 | 28 | 2 | 2·4 | 6 | 992 | 1 | 3 | 2 | 2·8128 | 2 | 2·8 | 2·8 |

**球面微分结构分类表**

这里 $n=3$ 情况是 **Perelman** 证明 **Poincare** 猜想的结果的推论，即对 **3** 维球面同胚与微分同胚等价。目前剩下的难题是：

**4 维球面 $S^4$ 上是否存在怪异微分结构？**

但是，7 维球面球面比较已经比较复杂了，而且维数多少有些特殊（至少不太整齐）。比 $n$ 维球面更简单的非平凡流形就是 $\mathbf{R}^n$ 了，这方面的一个著名结论是：

**当 $n\neq 4$ 时，欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 有惟一的微分结构。**

这个结论没有出乎意料，想想也是很自然的事情，毕竟欧氏空间整体上算是比较“平坦”的了。不过当 $n=4$ 时，却难住了大家，很长时间没有实质性的突破。或者说没有找到合适的“不变量”来分类。

关于 $\mathbf{R}^4$ 空间的实质性突破来自数学家 **Donaldson**，他在研究 **Yang-Mills** 方程（来自数学物理领域）时发现了一组新的不变量，可以对四维流形进行细致的分类。利用此不变量，人们相继在 $\mathbf{R}^4$ 上发现了若干怪异微分结构。特别地，利用反证法证明了：

**$\mathbf{R}^4$ 上存在不可数个互不相容的微分结构。**

个人感觉 $\mathbf{R}^4$ 的冲击力远超 7 维怪球的冲击力，加深了人们对空间的认识。

从简单到复杂，举了这么多例子，无非想强调不能简单地视“反例”仅仅为“反例”，换一个角度往往别有洞天！抛砖引玉，希望大家能从这篇小文章中有所收获。

# 猜想与形式推导

*SCIbird*

**说明**：鉴于笔者时间和精力有限，文章小错误难免。因此笔者建议读者最好将文章中的结论动手推导一遍，相信必有收获。光看不练，等于白看。

从文章标题“猜想与形式推导”看，是一个矛盾体，笔者试图将直觉主义与形式主义结合起来，说的通俗一些，本文重点即谈谈数学中的“**连猜带证**”方法。

一般地，就笔者所见，现行的数学教材大都采用形式化写法，即先给出若干定义，然后给出 $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ 之类的证明。虽然逻辑上无懈可击，但是读起来却比较乏味，收获不多。

其实读读数学史可以知道，一个定理的发现到证明，不可能是完全理性的，“**连猜带证**”的现象比比皆是。一位数学大师甲可能太过一种天马行空一般的途径 **A**，巧妙地猜出结论 **B**，然后用当时流行的“严密方法”（可能在现代看来还是不严密）给出定理 **A** 的证明 **C**。随着时间的流逝，定理 **A** 却被张冠李戴地冠以数学大师乙的名字，而教材中给出的证明却是完全不同于 **C** 的方法 **D**. 通常后人们只能读到结论 **B** 和证明 **D**. 至于 **C** 有可能在老掉牙的数学历史文献中的角落找到，而当初的途径 **A** 则可能永远消失在历史的尘埃中。

途径 **A**，即高斯所说的“脚手架”，定理 **B** 即瑰丽的建筑，不论在教材或者是论文中，总是把“脚手架”拆除掉，留下僵硬的严密证明。每当笔者读到一个定理时，总不禁要问，为什么只给出“证”，没有“猜”呢？很多结论看起来不是那么显然啊。在有过一些科研经历后，更是有这种感慨，现实问题比课本复杂多了，有着太多的变量，有着太高的不确定性。“猜”和“证”的相合，才是完整的科研。

看过 *SCIbird* 文章的人都知道，笔者特别称赞张筑生老师的《**数学分析新讲**》教材，不仅仅因为这是自己的第一本数学分析书，还因为张老师的写法启发性特别强，对“猜”的论述非常独到。本文试图效仿新讲，给出一些“猜”和“证”的例子，分享一下笔者的学习感悟，读者可以从中学习一些探索方法，有助于数学分析的学习。

需要说明的是限于篇幅，笔者重点谈谈“猜”，至于标准的严格证明，可参考《新讲》或者其它教材。

先从一个例子谈起：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. 这个等式最早由欧拉证明，后来人们发现了许多证明。标准的证明如考察 $f(x)=|x|$ 的 **Fourier** 级数展开式，比较巧妙的方法如“二重积分法”

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dxdy$$

等，详细证明见《数学天书中的证明》一书，建议大家读读。

该问题尽管有很多巧妙的证明，但欧拉本人的想法仍然非常有启发，其想法类比了多项式因式分解。

注意到 $\sin n\pi=0$，其中 $n=\pm1,\pm2,\cdots$ 为方程 $\sin x=0$ 的所有非零根，再类比多项式因式分解，欧拉得到

$$\frac{\sin x}{x}=(1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2})(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2})\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

利用正弦函数 $\sin x$ 的级数展开式，并将等式右边无穷乘积展开成幂级数，然后比较等式两边 $x^2$ 项的系数，即得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

当然，欧拉当时并没有考虑收敛性问题，有点阴差阳错得到了正确的结论。但是在科研中需要明白**“有思路总比没思路强，猜出了结果，证明起来就相对容易了”**这个道理。

不论是古人，还是现代人，实际科研中很少有把所有条件都验证完毕后，才开始行动的。经常是默认某些条件成立，然后往下推导，遇到问题再跳回去检验，是一种跳跃性模式。

有的情况是猜出了结果，然后用形式推导来反推，最后按正方向来证明。比如对 **R** 上的函数 $f(x)$，通过一些例子，猜想 $f(x)$ 可以表示成一个偶函数与奇函数之和（相当于“有序”分解）。初看起来有些棘手，但如果我们假设结论成

立，即 $f(x)=s(x)+c(x)$（奇偶函数之和），则根据定义，有

$$f(x)=s(x)+c(x) \text{ 以及 } f(-x)=s(-x)+c(-x)=-s(x)+c(x)$$

然后就像解方程一样，求出 $s(x)$ 和 $c(x)$ 表达式。严格的证明就是直接验证

$$f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

很多定理就是类似证明的，不过一般只给出严格的证明（缺少前半步）。这个例子还算比较显然的（至少好猜），一些复杂的例子就不那么好猜了。

比如考察两个黎曼可积函数 $f(x)$, $g(x)$，这里 $g(x+T)=g(x)$ 也是周期函数。则有如下的黎曼-勒贝格引理：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)g(nx)\,dx=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,dx\int_0^T f(x)\,dx$$

将整数 $n$ 换成一般的实数 $\lambda$，结论仍然成立。

上面这个等式不太容易直接想到，如果类比 **Fourier** 级数中的结论，则首先猜想出下面的等式（当然不一定无条件成立）：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)g(nx)\,dx=0$$

令 $f(x)\equiv 1$，上面等式恒成立，则有

$$\int_0^T f(x)g(nx)\,dx=\int_0^T g(nx)\,dx=\frac{1}{n}\int_0^{nT} g(t)\,dt=\int_0^T g(t)\,dt$$

上式的极限是 **0**，因此只能是

$$\int_0^T g(x)\,dx=0$$

考虑 $g(x)=\sin x$ 这个特例，显然满足题意。但对一般的周期函数 $g(x)$，在一个周期内的积分不一定为 **0**，通常是

$$\int_0^T g(x)\,dx\neq 0$$

不过借助几何直观，我们发现将周期函数 $g(x)$ 适当向上（或向下）平移 $C$ 个单位之后，得到的新的周期函数 $\varphi(x)=g(x)+C$ 满足周期积分为 **0**，即

$$0=\int_0^T \varphi(x)\,dx=\int_0^T g(x)\,dx+C\int_0^T dx$$

由此得到

$$C=-\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,dx$$

因为我们“猜想”

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)\varphi(nx)\,dx=0$$

所以我们可以进一步猜想

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)g(nx)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)(\varphi(nx)-C)\,dx=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,dx\int_0^T f(x)\,dx$$

**猜想出结果之后，总是可以验证的，而且证明起来也有了方向。**具体证明方法可选择利用阶梯函数逼近 $f(x)$ 来证明，这里从略。

一般来说，猜出结果总比证明要容易一些。特别是我们可以通过一些特例归纳出一般性的结论，然后进一步考虑给出严格的证明。不得不承认，产生出一个好的想法并不容易，依赖所谓的直觉或经验，这方面恐怕更多需要坚持不懈地练习与思考。比如猜想一个“好的”函数 $f(x)$ 可以展开成幂级数（泰勒级数）就是一个大胆而深刻的猜想，即

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

有了这个想法后，再利用形式推导确定系数相对容易多了。令 $x=0$，得到 $f(0)=a_0$；上面等式两边对 $x$ 求导，再令 $x=0$，得到 $f'(0)=a_1$；如此类推，得到一半的关系式 $f^{(n)}(0)=n!a_n$.

在泰勒级数问世之前，牛顿等数学大师已经导出了 $e^x$, $\sin x$, $\cos x$ 等函数的幂级数表达式，通过类比得到一般的猜想 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$，由此诞生了解析函数。

站在后人的角度看前人，精彩之余也确实感到数学的严格性问题，实际上很多大师因为当时的整体环境限制也得到了一些荒谬的结论。所以，采取大胆猜想，形式推导，案例验证和严格证明这样一条龙的方式更可取一些，这也是笔者推荐的思维方法。

最后我们从工科生的独特角度谈谈复变函数中的柯西定理来结束本文，限于篇幅，这里不对定理一般性条件做精确表述，只介绍一些想法。严格而完整的证明请参考阿尔福斯的《**复分析**》一书。

据说出于习惯，数学系看到一个问题的思维习惯是先考虑存在性和唯一性，在此纠结了很久，然后再尝试推导。工科生则不管那一套，在极端的情况很难遇见，和谐是普遍的思想指导下，经常拿来就直接推导或计算。对此可以概括下工科生对待微积分的解题（或科研）的**“三不管”**：

1. 不管三七二十一，先对 $f(x)$ 先展开成泰勒级数（或多项式）再说；
2. 不管三七二十一，先对级数逐项积分或逐项求导再说；
3. 不管三七二十一，先对含参数积分在积分号下求导再说。

就笔者了解，一般工科《高等数学》或《微积分》教材不讲授“一致收敛”概念，更不用说“控制收敛”概念，直接应用上述三不管。这在数学系看来，有些难以接受。所幸，实践表明“三不管”方法非常简单实用，好用就是合理（工程中的经典原则）。

如果一个工科生在自学完《数学分析新讲》后，被欧拉公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

的奇妙所吸引。不禁想到，要是一般的复函数 $e^z$，或者更一般的复函数 $f(z)$ 是不是也会有一些奇妙的结论呢？心动不如行动，考虑当变量为函数的情况，有没有类似推广。工科生决定采用如下方法。首先，尽可能少定义新的概念，能从微积分中 **copy** 就 **copy**，最好是直接拿来主义，然后再套用“三不管”方法。

根据复数实数化原则，即 $z=x+iy$，将复数 $z$ 看成两个实数外加一个序数单位 $i$，于是先研究 $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$. 工科生的工具其实就那些，求导和积分。

首先考虑复变导数的定义，直接 **copy** 微积分就行了。在他看来，复导数的极限定义与方向导数和二元函数连续性条件很相似，可类比一下。如果一个定义是普适的，那么对特例情况也成立。于是沿着两个特殊方向 $x$ 轴和 $y$ 轴定义出的复导数应该相等，由此导出 **C-R** 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

下面是定义积分，有些麻烦，因为复变函数 $f(z)$ 实际是 **2** 维的，但又必须当做一个整体。由此类比曲线积分，一个想法是定义在一条曲线上

$$\int_C f(z)\,dz:=\int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt$$

此想法还是“复数实数化思想”，即意识到 $z=x+iy$ 和 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，而曲线的参数坐标是 $x=x(t)\,,y=y(t)$. 本质上，该想法是将复积分看成两个实曲线积分。

严格说，作为定义，还需要考察该积分是否与曲线参数表达式的具体选取有关。不过工科生没有考虑这么多，他发挥其擅长计算的特长，发现

$$\int_C f(z)\,dz := \int_C (u+iv)\,(dx+idy) = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

看到这个表达式之后，出于习惯，他联想到当曲线$C$是闭曲线时，似乎可以应用格林公式，计算表明当导函数$f'(z)$连续，对闭曲线$C$有

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy \\ &= -\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0\end{aligned}$$

这里应用了前面的 **C-R** 方程。一个著名的结果（**柯西定理**）

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

对比一下《新讲》中曲线积分与路径无关章节，可定义一个只依赖于起始位置的“点函数”$F(z)$，它不依赖于路径的选取

$$F(z) = \int_0^z f(\tau)\,d\tau$$

出于习惯，得到一个抽象的结论之后，总想着拿例子验证一下。工科生选择了幂函数$z^n$，结果支持自己的判断。

工科生继续应用自己有限的工具前进，不管三七二十一，先把$f(z)$展开成幂级数再说。

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(z-a)^2 + \cdots$$

两边直接求积分没什么意思，无意中发现对等式

$$\frac{f(z)}{z-a} = \frac{f(a)}{z-a} + f'(a) + \frac{1}{2!}f''(a)(z-a) + \cdots$$

两边求积分（注意到等式右边除第一项外都是多项式），得到新的等式

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a)\int_C \frac{dz}{z-a}$$

这里$C$总是默认为一条简单闭曲线。

工科生心想，如果$C$是圆周$C: z = a + re^{i\theta}$那就好办，直接代入得到

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}\,d\theta}{re^{i\theta}} = 2\pi i$$

但是闭曲线$C$不是圆周怎么办？工科生忽然想到了格林公式里面的“挖奇点”技巧，在闭曲线$C$内做一个包含点$a$的充分小的圆$C_\varepsilon$，则闭曲线$C$与圆$C_\varepsilon$所围

区域没有奇点，可以应用格林公式，于是得到

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

由此得到另一个有趣的结果（**柯西公式**）

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

有意思，一点的函数值竟然可以用包围该点的闭曲线的积分来确定。

将上述公式看做一个含参数 $a$ 的积分，再来一下积分号下求导，得到

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz$$

反复积分号下求导，得到

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

看到导数竟然与积分发生“等式联系”，工科生想到了泰勒级数与傅里叶级数，前者的系数通过导数确定，后者的系数通过积分确定。想不到，竟然在复数里取得了思想上的“统一”。越想越抽象，有些意识流了，再考虑到走的太远了，工科生决定暂时收手了。

以上故事当然是虚构的，不过那“**三不管**”（**三板斧**）倒是真的，我见过的许多人（包括我自己）都这么用过，物理和力学教材中很多定理就是这么推导出来的。物理学大师费曼算是工科生吧，据他自己在自传中描述到，他一直搞不懂围道积分，所以一直用积分号下求导这一方法，用的是炉火纯青！

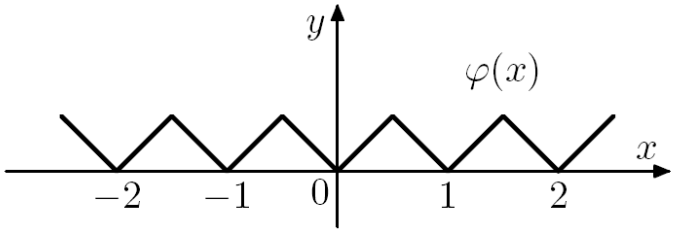
# 谈谈数学中的构造法

***SCIbird***

**说明**：鉴于笔者时间和精力有限，文章小错误难免。因此笔者建议读者最好将文章中的结论动手推导一遍，相信必有收获。光看不练，等于白看。

在写本文时自然想到了“反例”，确实，数学中很多天才的构造方法是以“反例”形式出现的。在数学分析中，最具代表性的要数“**处处连续处处不可导函数**”这个经典反例。

记 $\varphi(x)$ 表示 $x$ 与离它最近整数的距离，则 $\varphi(x+1)=\varphi(x)$．建议动手画画图，发现这是一个“锯齿函数”




令 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(4^n x)}{4^n}$ ，$x\in\mathrm{R}$．此函数级数是一致收敛的，因此定义了一个连续函数，这个函数处处连续处处不可导。具体证明见《新讲》第三册。

**注**：张筑生老师的《数学分析新讲》简称《新讲》，以下同。

上面反例的证明不难，但对于这种天书一般的想象力，很多人自然想一探究竟，如何想出来的。笔者曾试图归纳总结一下想象力或者创造力有没有什么规律，结果却是徒劳。大概试图用一种确定性方法，来研究高度不确定的对象，可能出发点就不太对。这也许就是创造力本身被称赞为艺术的原因之一吧，数学中的构造性方法是创造力的典型代表。

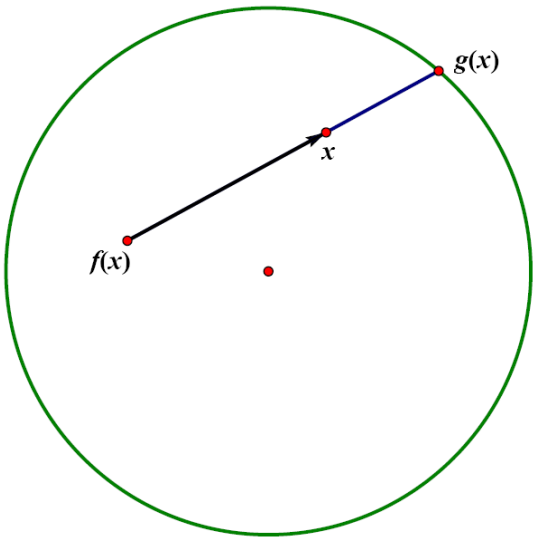
本文不采用抽象的论述来描述构造法，而是试图用一些例子来说明一下。个人经验表明，如果你对某个 **XX** 理论感到难以掌握，那么最好去搜集整理十个该理论的经典例子，然后完整地推导一遍，会有一个认识上的飞跃的。

数学中的构造性方法有几种体现：

1. 有的是否定某个想法（如上面的处处连续处处不可导函数）；
2. 有的是验证某个结论是否成立，比如我们研究某一类函数或泛函的下确界问题，猜出下界 $C$，然后在构造一个函数序列，使得下界 $C$ 能够被逼

近，这说明 $C$ 就是所求的下确界。

3. 有的是验证某些定理成立的前提条件，如果条件改一改定理结论是否成立？如著名的布劳威尔不动点定理断言从单位闭球到单位闭球的连续映射 $f: D^n \to D^n$ 必有不动点 $f(x_0)=x_0$. 这是一个拓扑学定理，如果把单位闭球 $D^n$ 换成一般的单位球面，是否存在不动点？容易证明，不动点不一定存在，如设映射 $f$ 为对径映射 $f(x)=-x$，这也是一种构造法。实际上不动点证明的关键是利用了单位闭球 $D^n$ **“凸性”**，下面这张图在不动点的各种证明（如《新讲》第三册）中经常遇见，这个构造的新映射 $g(x)$ 太重要了！




上面这几个例子还是局限在数学分析本身，其实构造法还可以走的更远一些，如分析和几何跨界。这里强调：本文所称“构造法”，不仅包括严格的数学证明，也包括一些带有想象力的独特想法。下面用两个问题来说明一下。

第一个问题是北大 **2009** 年研究生考试的一道数学分析试题，问题如下：

**已知** $x, y, z \geq 0$ ，$x+y+z=\pi$ **，试求** $2\cos x+3\cos y+4\cos z$ **的最大值和最小值。**

本题的解法并不难，难的是如何求解超越方程。先消去 $z$ 转化为无条件极值问题，则原问题等价于求下列二元函数的最值：

$$2\cos x+3\cos y+4\cos z=2\cos x+3\cos y-4\cos(x+y):=f(x,y)$$

其中 $f(x,y)$ 定义在有界闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\leq x, y\leq \pi\ ,\ 0\leq x+y\leq \pi\}$ 上。由区域 $D$ 的紧性以及 $f(x,y)$ 的连续性可知，最大值和最小值存在。

求解过程很流程化，先求边界上最值，再求解内部的驻点值，然后放在一

起比较大小即可。容易求出边界$\partial D$上最大值为 **5**，最小值为 **1**；求解内部的驻点值似乎要求解三角方程：

$$\begin{cases} f_x(x,y)=4\sin(x+y)-2\sin x=0 \\ f_y(x,y)=4\sin(x+y)-3\sin y=0 \end{cases}$$

客观说，笔者初解时被这个问题卡住许久，不大相信北大出这道题是要考生求解方程。经过思考之后，笔者发现，问题是要求函数的驻点处的函数值，而不是驻点值，也就说只要证明驻点存在即可。

一方面，偏导数方程给出了三角函数的“比例关系”。另一方面可观察到若驻点值存在，则$x$, $y$都是正数且满足$x+y+z=\pi$. 多少有些灵感划过心海吧，我意识到如果把$x$, $y$, $z$视作三边之长分别为$a$, $b$, $c$的三角形的内角，则由“**正弦定理**”（来自几何），得

$$\frac{c}{\sin(x+y)}=\frac{b}{\sin y}=\frac{a}{\sin x}$$

结合偏导数方程，得到关系式$a=2c$, $3b=4c$. 令$a=6t$, $b=4t$, $c=3t$，则不难验证确实可以构成一个三角形，且满足此关系的三个内角是惟一确定的，这就证明了驻点的存在性。

余下就容易了，利用余弦定理可以算出

$$\cos x=-\frac{11}{24},\cos y=\frac{29}{36},\cos z=\frac{43}{48}$$

于是驻点对应函数值为

$$-2\times\frac{11}{24}+3\times\frac{29}{36}+4\times\frac{43}{48}=\frac{61}{12}>5$$

于是原问题所求最大值为$\frac{61}{12}$，最小值为 **1**. 出乎意料，这个最大值还真不好猜。

本题的巧妙之处在于以“正弦定理”为桥梁，将一个三角方程问题转化为一个三角形的边角关系问题，算得上是“数形结合”的例子吧。

另一个问题是一道智力题，一般化的表述为：

**设在区间$(0,1)$内随机选取$n$个数，求这$n$个数中最小的数的期望。**

这个问题不算难，有标准的解法。每个数在$(0,1)$都服从均匀分布，即这$n$个数是独立同分布的。记第$i$个数对应的随机变量是$X_i$，则原问题转化为求最小数的概率分布或概率密度

$$P\{\min(X_1,\cdots,X_n)\le x\}=?$$

然后在按照数学期望公式直接计算即可。

首先，由独立同分布可知

$$\begin{aligned}&P\{\min(X_1,\cdots,X_n)\le x\}=1-P\{\min(X_1,\cdots,X_n)>x\}\\&=1-P\{X_1>x,\cdots,X_n>x\}=1-P\{X_1>x\}\cdots P\{X_n>x\}\end{aligned}$$

其次由独立随机变量 $X_i$ 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布

$$P\{X_i>x\}=\int_x^1 du=1-x$$

由上面可求出这 $n$ 个的联合分布函数

$$F_{\min}(x)=P\{\min(X_1,\cdots,X_n)\le x\}=1-(1-x)^n,\ x\in(0,1)$$

于是其对应的概率密度函数为

$$f_{\min}(x)=F'_{\min}(x)=n(1-x)^{n-1}$$

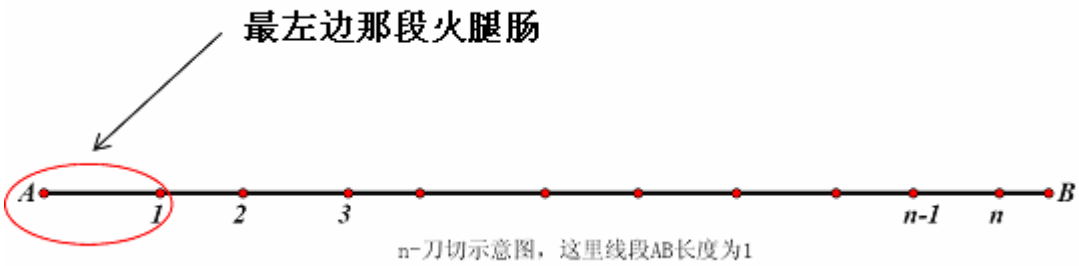
所求最小数 $X=\min(X_1,\cdots,X_n)$ 的数学期望为

$$EX=\int_0^1 nx(1-x)^{n-1}\,dx=nB(2,n)=\frac{1}{n+1}$$

计算中用到了 $\Gamma$ 函数与 $B$ 函数的一些基本性质。

这是一个标准且严格的数学证明，也是笔者最初想到的方法。但总觉得不太自然，因为当时很快猜出了结果 $1/(n+1)$，总觉得有更直观的思路，感觉就在眼前，但却捕捉不到。晚上在超市里买火腿肠时来了灵感，笔者发现这个问题可以转化为更直观亲切的表述：

**考虑一根长度为 1 的火腿肠，随机切 $n$ 刀，分成 $n+1$ 段，问最左边的那一段长度期望是多少？**




将这 $n+1$ 段火腿肠调整排列次序，仍然组成一根长度为 1 的火腿肠，构成另一个 $n$ 刀切（某种平等性），可推测出这 $n+1$ 段火腿肠的长度期望均相等，都是 $1/n+1$，这个数就是我们所求的最小数的期望。直观上确实不难想到，最左边那段火腿肠没有什么特殊性。

上面两个问题第一个借助于几何来构造求解方法，第二个借助于物理来构

造求解方法。将一个具体问题抽象化能有助于帮助我们接触到数学本质。反过来，将一个抽象问题具体化、直观化，有助于找到方向，毕竟构造法是一个具体过程。

数学中的构造方法太多了，诸如多项式逼近连续函数的**“伯恩斯坦多项式”**，傅里叶级数理论中的**“费耶和”**，求解非线性方程的**“牛顿迭代法（切线法）”**等等。只有对这些定理的应用条件和证明关键地方掌握得非常熟练，再配合大量的应用联系，才能提高创造力。天下没有免费的午餐，熟能生巧，此提高创造力的必要条件也。

最后介绍一下中值定理辅助函数构造法中最常见的**“$e^{\int P}$ 因子法”**，该方法体现了中值定理与微分方程之间的联系，在解题中非常实用。

中值定理与微分方程关系紧密，比如 **1** 阶形式 $f'(\xi)+P(\xi)f(\xi)=0$．将 $\xi$ 视作变量 $x$，得到一个一阶微分方程 $f'(x)+P(x)f(x)=0$．分离变量，再积分得到

$$f(x)e^{\int P(x)}=1$$

上式两边对变量 $x$ 求导，再注意到关键因子 $e^{\int P}$ 是正的，可以消去，得到

$$f'(x)+P(x)f(x)=0$$

就笔者所见，大多数 $f'(\xi)+P(\xi)f(\xi)=0$ 类中值定理问题的辅助函数如下

$$F(x)=e^{\int P(x)}f(x)$$

然后验证 $F(x)$ 有“两个零点”，应用罗尔中值定理，得 $f'(\xi)+P(\xi)f(\xi)=0$．
不光是中值定理问题，很多凑全微分问题也利用了上面的因子法思想，如

**设 $C$ 是区间 $[0,1]$ 上的所有实值连续可微函数 $f$ 的集合，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$．求出最大的实数 $u$，使得 $\forall f\in C$，不等式**

$$u\le\int_0^1|f'(x)-f(x)|\,dx$$

**恒成立。**

所求最大实数 $u=1/e$．这里利用导数恒等式 $f'-f=(e^{-x}f)'\cdot e^x$ 以及 $e^x$ 在区间 $[0,1]$ 上的单调性($e^x\ge1$)，得

$$\int_0^1|f'(x)-f(x)|\,dx=\int_0^1|(e^{-x}f)'\cdot e^x|\,dx\ge\int_0^1(e^{-x}f)'\,dx=(e^{-x}f)'\Big|_0^1=\frac{1}{e}$$

于是$u \geq 1/e$.

放缩中我们利用了关系式$e^x \geq 1$，显然为了使得下确界成立，还必须构造函数序列，使得$1/e$可以被函数序列积分逼近。一种构造方法是利用直线和指数函数组合成的分段函数来构造函数序列。当然，这种分段函数在连接点位置不一定可导，不过可以挖去这小部分，然后用一个光滑函数来连接，而不显著影响积分值。具体过程留给大家去思考。

二阶中值定理不常见，如果是常系数的情况$f''(\xi)+pf'(\xi)+qf(\xi)=0$，且方程系数满足$p^2-4q \geq 0$. 此时可效仿一阶情况。这类二阶问题一般需要函数$f(x)$有三个零点，然后求导两次，得到表达式。

辅助函数的构造依然按照解微分方程思路，根据《新讲》第一册介绍的算子法，引入微分算子$D=d/dx$，设方程$t^2+pt+q=0$的两根为$\lambda_1, \lambda_2$，则

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)f(x)=0$$

解上面的微分方程，仍然可以按照一阶方程的因子法。

先可构造辅助函数

$$F(x)=e^{-\lambda_2 x}f(x)$$

如果$f(x)$有 **3** 个零点，对上面公式求导可知$g(x)=(D-\lambda_2)f(x)$有 **2** 个零点。类似地，再构造辅助函数$\varphi(x)=e^{-\lambda_1 x}g(x)$，求导可知

$$f''(\xi)+pf'(\xi)+qf(\xi)=0$$

最后强调，中值定理的试题比较活，需要活学活用才行，常需要分析法和归纳法相结合。

数学中的构造方法变化多端，少有定法，本文涉及的几个微积分初等例子也不可能穷其所有。如果对提高数学创造力给出一个可行的具体办法（带有个人看法），除去天赋之外，笔者给出的建议是：**熟能生巧，多想多干。**

祝大家学习顺利！

# 硬算是一门基本功

*SCIbird*

**说明**：鉴于笔者时间和精力有限，文章小错误难免。因此笔者建议读者最好将文章中的结论动手推导一遍，相信必有收获。光看不练，等于白看。

听很多人说过，数学分析这门课程技巧很多，特别活。确实，学好数学分析必须掌握分析中的一些基本技巧，如逐次逼近、分段估计、基底分解，反演变换等等。有些方法之精巧，构思之巧妙，甚至令人望而生畏。

客观说，数学分析里也有技巧性要求较低的方法，比如计算。很多人将计算归到微积分中，认为和数学分析是两回事。笔者没有这方面成见，数学分析和微积分本是同源，先贤大师们都不认为是两家，笔者更是如此。有句话说，天下武功唯快不破。那么也可以说，数学分析为“算”不破。做题也好，搞科研也罢，很多好的想法或猜想就是在计算中发现的，数论中的类似例子就很多（如哥德巴赫猜想和黎曼猜想）。

很多时候，某些数学证明本质就是一系列暴力计算，如级数乘级数，或者一系列的求导合并同类项等。一般认为，严格证明“中国剩余定理”的是欧拉和高斯，而中国古人讲究具体计算，而不是一般性的证明，为什么冠以“中国剩余定理”之名？其实，中国古人构造的算法本身就是这个定理的证明，算即是证明。

笔者之前写过一篇关于“猜想与形式推导”的文章，而计算常常也是形式推导中的一种，笔者称之为“**硬算**”。目前有一个糟糕的两极分化现象，工科的偏爱计算，见到证明题就头大；数学系的偏爱证明，对计算不屑。其结果是走两个极端，工科的证明水平比较低，数学系的计算能力比较差。记得上研究生数值分析 **A** 时，身边一个 **mm** 抱怨“老师讲那么多理论干嘛，只要告诉我怎么算就行了”，而且很理直气壮，很强大。又惊闻某实验班教授数学分析，结果有的学生算个常规不定积分，半天做不出来。笔者觉得十分有必要扭转这种不好的现象，证明和计算是统一的，而不应该人为的割裂开。

很多数学定理的发现或者证明确实是算出来的，即便将来打算搞基础数学，适当加强自己计算能力也是有好处的（特别是电脑时代，数值实验变得很容易）。

有些东西你不亲自动手算算，你是看不出规律的，你不积累，如何爆发！

回顾历史，许多大数学家都是擅长计算的，比如笔者的数学偶像高斯，后半辈子在搞天文计算。那时没计算机，基本靠手算，天文数字很好算吗？不过后人整理高斯的手稿时，发现他很少有算错的。

以高斯发现**素数定理**为例。记 $\pi(x)$ 表示不超过 $x$ 的素数的个数，所谓素数定理，指下面极限表达式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x}=1$$

高斯记函数 $\mathrm{Li}\,x=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}$（这是一个非初等积分），这是 $\pi(x)$ 的另一个渐进表达式。由洛比达法则可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{Li}\,x}{x/\ln x}=1$$

函数 $\mathrm{li}\,x$ 按如下方式定义

$$\mathrm{li}\,x=\lim_{\eta\to 0}\left(\int_0^{1-\eta}+\int_{1+\eta}^x\right)\frac{dt}{\ln t}$$

显然 $\mathrm{Li}\,x=\mathrm{li}\,x-\mathrm{li}\,2$.

与前人思路不同高斯不是简单研究 $\pi(x)$ 的数值分布特点，而是考察比值 $\pi(x)/x$ 的分布特点，猜测是否有简单函数来近似代替。

| $x$ | $\pi(x)$ | $\frac{x}{\log x}$ | $\mathrm{li}\,x$ | $\frac{\pi(x)}{\mathrm{li}\,x}$ | $\frac{\pi(x)}{x}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 000 | 168 | 145 | 178 | 0.94... | 0.1680 |
| 10 000 | 1 229 | 1 086 | 1 246 | 0.98... | 0.1229 |
| 50 000 | 5 133 | 4 621 | 5 167 | 0.993... | 0.1026 |
| 100 000 | 9 592 | 8 686 | 9 630 | 0.996... | 0.0959 |
| 500 000 | 41 538 | 38 103 | 41 606 | 0.9983... | 0.0830 |
| 1 000 000 | 78 498 | 72 382 | 78 628 | 0.9983... | 0.0785 |
| 2 000 000 | 148 933 | 137 848 | 149 055 | 0.9991... | 0.0745 |
| 5 000 000 | 348 513 | 324 149 | 348 638 | 0.9996... | 0.0697 |
| 10 000 000 | 664 579 | 620 417 | 664 918 | 0.9994... | 0.0665 |
| 20 000 000 | 1 270 607 | 1 189 676 | 1 270 905 | 0.9997... | 0.0635 |
| 90 000 000 | 5 216 954 | 4 913 897 | 5 217 810 | 0.99983... | 0.0580 |
| 100 000 000 | 5 761 455 | 5 428 613 | 5 762 209 | 0.99986... | 0.0576 |
| 1 000 000 000 | 50 847 478 | 48 254 630 | 50 849 235 | 0.99996... | 0.0508 |

表格出自华罗庚的《数论导引》

按数学家迪厄多内的说法，高斯考虑 $(x, x+1000)$ 内的所有素数，通过大量

的计算，高斯从数值表中观察到，当$x$很大时，有下面的近似性质：

$$\frac{\pi(x+1000)-\pi(x)}{1000}\text{正比于}\frac{1}{\ln x}$$

数值计算表明，用$\mathrm{Li}\,x$来近似表示$\pi(x)$，效果不错。

笔者相信如果不是高斯事先计算了大量的素数，他也不可能发现观察出素数分布密度特征的。当然，这里面也包含了高斯的数学直觉。笔者也猜想，古人搞天文计算，经常与大数打交道，不可能不熟悉对数表，有的大师更是将对数表背下来了，相信高斯就是其中之一。这里需要指出，被对数表也有窍门，经常要与差值计算相结合，这样可以减少工作量。

素数定理的例子有些高深，可以再举一个亲切的例子，求函数乘积$(uv)^{(n)}$的导数展开公式，也称莱布尼茨公式。这个公式证明不是很复杂，结论也不是很难记，不知大家有没有算过？

$$\begin{aligned}
&(uv)'=u'v+uv'\\
&(uv)''=u''v+2u'v'+uv''\\
&(uv)'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''\\
&\cdots
\end{aligned}$$

如果你有耐心，计算次数比较多，如 **3** 次、**4** 次、**5** 次，合并结果中的同类项后，你会发现两个规律：

**1.** 各项系数是二项式系数（杨辉三角**)**；

**2.** 函数$u$ , $v$的导数阶数之和都为$n$ .

如果你记忆力足够好或高中学的扎实，你会立刻发现这很像二项式展开式，所以你可以大胆的猜想一般结果是：

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$$

这就是后来的莱布尼茨的公式。你可以尝试用数学归纳法严格证明它。这个例子说明并不是所有的数学定理都隐藏的很深，很难发现规律，数学有时候也很简单和自然。

当然，上面的求导公式例子比较简单，计算量比较小。其它问题可就不一定了，比如微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$，笔者经常发现很多人询问这个方程的解是什么，求解答等等。估计很多人是在科研过程中遇到这个问题。

数学系的显然知道，上面的二阶变系数微分方程通常没有“初等解”，所以很多人一厢情愿地想找到某个解的想法泡汤了。然后很多数学系的人对此问题就不管了，反正没有初等解。

其实没有初等解不代表没有解，方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解也不是解不出来。不过你得换一种思维习惯，接受“**级数解**”。诚然，初等函数的范畴太狭窄了，而非初等函数又似乎神秘莫测。不过，古人想出了一招，可以研究相当多的非初等函数，那就是幂级数和三角级数。很多非初等函数是可以表示成幂级数的，比如大名鼎鼎的椭圆函数。级数，数学分析教学中被低估了的强大工具。

关于微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的幂级数解法详见《**数学物理方法**》教材，这里不多说了。幂级数方法也可以处理一些非初等积分，例如根据勒让德等人在椭圆积分方面的研究结果，**第一类椭圆积分**的标准型为

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

其中参数 $0<k^2<1$．将被积函数对 $k^2$ 做二项级数展开，再对 $\varphi$ 逐次积分，计算得

$$E(k)=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\frac{25}{256}k^6+\cdots\right)$$

注意，上面得到的是精确解，而不是数值积分中的近似解。实际应用中也不一定全用幂级数，也可以使用三角级数，或者其它特殊函数。记得有本名著叫《特殊函数概论》，有兴趣的读者可以去看一看。

据笔者了解，有人排斥“硬算”还有一个莫名的原因----“不体现数学美”。在这些人看来，只有简洁优美的数学证明才值得看。而与硬算有关的东西，哪怕是证明，通常很暴力，甚至 **ugly**！

上面的想法要不得，除非天赋异禀，否则这样的人或者没有科研经验，或者本身不能给出证明，却始终幻想“存在”某条“数学捷径”。数学史一再证明了，很多优美深刻的数学定理的“**第一个证明**”（优先权），通常不完美，有时也不是很严格，甚至很 **ugly**！

为了说明这一点，举一个笔者见过的典型例子-----**Fourier 级数（够深刻优美吧）的“发现”**。注意，笔者强调的是发现，而不是证明。当年数学家傅里叶通过物理中的研究热传导现象，提炼出一个**偏微分数学方程：**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k^2 \dfrac{\partial T}{\partial t} \\ T(0,t) = T(\pi,t) = 0 \ \ , t > 0 \\ T(x,0) = f(x) \ \ , 0 < x < \pi \end{cases}$$

除偏导数方程外，另外两个是边值条件和初值条件。$k$ 是热传导系数，通常不是整数。方程对应物理模型是一根长度为 $\pi$ 的细长杆，两段温度为 **0**，侧面绝热。这里不严格讨论物理过程和方程是如何建立的（可参考《数学物理方法》教材），只探讨傅里叶当年是如何来求解这个方程的梗概，方法非常经典（也很暴力），即**“分离变量法”：**

傅里叶假设方程的解可以分离变量 $T(x,t) = X(x)Y(t)$，然后代入原方程得到 $X''(x)Y(t) = k^2 X(x)Y'(t)$，于是

$$\frac{X''(x)}{k^2 X(x)} = \frac{Y'(t)}{Y(t)} =: -\lambda$$

显然，上面方程若恒等，只能等于常数 $-\lambda$（这里常数 $\lambda > 0$）。对 $\lambda = 0$ 和 $\lambda < 0$ 两种情况可以排除，读者可自行推导一下。

记 $\lambda := \mu^2$，其中 $\mu > 0$．考虑常微分方程

$$X''(x) + \mu^2 k^2 X(x) = 0\text{，边界条件 } X(0) = 0, X(\pi) = 0$$

上面方程的通解是 $X(x) = A\cos\mu kx + B\sin\mu kx$，代入边界条件得到 $A = 0$，以及 $B\sin\mu k\pi = 0$，由此得到 $\mu k = n$（整数），于是常数

$$\lambda = \mu^2 = \left(\frac{n}{k}\right)^2$$

再求解微分方程 $Y'(t) + \lambda Y(t) = 0$。最终得到这样一个特解

$$T_n(x,t) = b_n e^{-\lambda t}\sin nx$$

傅里叶的想法是把所有满足条件的解都拿来主义，放到一起（所谓叠加原理），得到该问题的级数解：

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda t}\sin nx$$

注意到，还有一个初始条件 $T(x,0) = f(x)$，于是得到

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

注意到等式左边每一项是一个周期函数也是一个奇函数，可以奇延拓到$[-\pi,0]$上去，然后进而按照周期延拓到整个实数轴上去。

傅里叶并没有停止脚步，他发现如果把边值条件修改一下，变成

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial T}{\partial x}(\pi,t)=0$$

同样的方法，能得到一个含有余弦级数的偶函数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

考虑到一个函数$f(x)$能表示成一个奇函数与偶函数之和，傅里叶提出一个极为大胆的猜想，这是即泰勒级数之后又一伟大的猜想：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

这就是名震千古的 **Fourier** 级数，至今仍然是数学的主流！

接下来需要确定系数$a_n,b_n$，可以采用欧拉的积分方法，也就是现行教材中利用三角函数积分的正交性标准方法。

严格来说，上面的等式未必成立。通常关于 **Fourier** 级数的收敛性有很多判别定理，如狄利克雷条件等（见《新讲》）。站在现代角度讲，傅里叶的以上想法看起来更像是牵强附会的形式推导，外加一堆蛮力硬算（当然后人们补充了若干证明，使之成为严格的数学理论）。

但正是傅里叶的以上很暴力、不严格、甚至异想天开的想法，开辟了一个新的天地。在笔者看来，这些想法不比当今教材中的严格证明逊色，甚至有过之而无不及。

笔者后来发现原来《新讲》第三册中也给出了上面的分离变量法，得到了 **Fourier** 级数表达式，不过采用的例子是弦振动方程，而不是热传导方程，但方法大同小异。不过可惜的是，也许出于教材写法的限制，张老师没有从创立者的角度来写文章，笔者最初读起来没有什么太多激动感。

多年后笔者回想，为什么同样的文章读起来没有热血的感觉呢？为什么小

孩子对很多大人习以为常的事情那么好奇，觉得不可思议，大人们却无动于衷呢（可能是大人们知道太多了）。在数学中进行换位思考，假设自己处于创立者的角度，换个角度看问题，就别有洞天了！

试想，分离变量法是大学《数理方程》课程中的经典方法，但有多少人想过，假设自己不知道 **Fourier** 级数，那么在用分离变量法求解热传导方程或者弦振动方程时，我们其实发现了一种三角级数，就是 **Fourier** 级数。

**附录：**

一般来说文章写得太长不太好（大家都很忙，太长了就没人看），用 **A4** 纸写得话，最好不超过 **6** 页。当然，如果是 **20XX** 年北大数学分析试题解答的话，估计写成 **20** 页，仍然会有很多人看下去，因为需要。

但凡事没有免费的午餐，看完一本 **200** 页的书，可能只有 **20** 页是精华，这种现象太普遍了，但你事先不知道这 **20** 页的精华在哪里。也许有大牛会主动挑出来精华部分。但不经过“简单→复杂→简单”的过程，怎么能如何体会到“大道至简”的含义呢？

工程中有一个道理，如果没什么思路，不知道如何建立模型，那么就往后退，从最原始的数据出发来研究。而数学研究中的最原始方法何尝不是计算呢？工科生重计算，数学系重证明，这纯粹是剑宗和气宗的门户之见，要不得。

最后，有一个例子太经典了，于是不得不把本文加长，作为附录添加到文章里，这又是一个经典的硬算例子，出自数学大师高斯之手，被收录进 $SCIbird$ 编辑整理的《**高斯经典文章及相关数学工作汇编**》一书（网上有电子版）。

算术-几何平均数列与椭圆积分

$SCIbird$

谨以本文纪念一代数学大师高斯

# 算术-几何平均数列与椭圆积分

*SCIbird*

谨以本文纪念一代数学大师高斯

**摘要：**本文主要以《高斯全集》第三卷所提供的材料为基础整理成文章，尝试用相对通俗和现代的语言来解释下高斯在“算术-几何平均数列与椭圆积分”之间建立联系这一出色工作。这篇文章难度不大，读者具有大学二年级微积分水平即可。

数学大师高斯曾经考虑过下面的数列

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$$

其中 $a_0 = a\,, b_0 = b \quad (a > b > 0)$，我们不妨设称此数列为“算术-几何平均数列”，简称为 **A-G** 平均数列。由均值不等式，得 $a_n \geq b_n$，进而得到

$$a \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq b_n \geq \cdots \geq b_1 \geq b$$

再由单调有界数列必有极限，知两数列必有极限。为证明两极限相等，需要一点技巧。根据“闭区间套”定理可归纳出如下猜想，

$$0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{a_n - b_n}{2}$$

上面不等式左边显然成立，将递推关系代入知右边不等式等价于 $b_n \leq \sqrt{a_n b_n}$，显然也成立。由“闭区间套”定理知 **A-G** 数列存在共同极限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: M(a\,, b)$$

高斯的主要工作就是给出了极限 $M(a\,, b)$ 的具体表达式

$$M(a\,, b) = \frac{\pi}{2G(a\,, b)} \tag{1}$$

其中

$$G(a\,, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

这个 $G(a\,, b)$ 称为高斯型椭圆积分，也称为第一类椭圆积分。高斯的工作正是揭示了 **A-G** 平均数列与椭圆积分之间存在奇妙的联系。

在知道积分表达式 $G(a\,, b)$ 的前提下，我们可以证明等式（**1**）成立，过程

如下：

考虑积分变量代换

$$\sin\varphi=\frac{2a\sin\theta}{(a+b)+(a-b)\sin^2\theta}$$

容易验证当$\theta$变量从0变化到$\pi/2$时，变量$\varphi$也在改范围内单调递增变化。微分上式，得

$$\cos\varphi d\varphi=2a\frac{(a+b)-(a-b)\sin^2\theta}{[(a+b)+(a-b)\sin^2\theta]^2}\cos\theta d\theta$$

另一方面，由$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$得

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2\sin^2\theta}}{(a+b)+(a-b)\sin^2\theta}\cos\theta$$

由此可建立等式

$$d\varphi=2a\frac{(a+b)-(a-b)\sin^2\theta}{(a+b)+(a-b)\sin^2\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2\sin^2\theta}}$$

注意到

$$\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}=a\frac{(a+b)-(a-b)\sin^2\theta}{(a+b)+(a-b)\sin^2\theta}$$

所以得到“加法公式”

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}=\frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cos^2\theta+ab\sin^2\theta}}$$

取$a_1=\frac{a+b}{2}, b_1=\sqrt{ab}$，则

$$G(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{a_1^2\cos^2\theta+b_1^2\sin^2\theta}}$$

反复迭代上面的“加法公式”，得

$$G(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta+b_n^2\sin^2\theta}}$$

由不等式关系$a_n\geq b_n$，得到

$$\frac{\pi}{2a_n}<G(a,b)<\frac{\pi}{2b_n}$$

上面不等式两边对 $n$ 取极限，利用夹逼定理，得

$$G(a,b)=\frac{\pi}{2M(a,b)}$$

这样我们就证明了前面的结论。

值得注意的是我们是已知极限的表达式来证明的，知道了结果总是一个有利条件。但是，如果仅从 **A-G** 数列出发，则很难猜出极限 $M(a,b)$ 的积分表达式的。这个积分表达式又相当整齐，很长一段时间，我一直猜想高斯可能是先研究积分变换的“加法公式”

$$G(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cos^2\theta+ab\sin^2\theta}}$$

然后自然导出 **A-G** 数列的。这样比直接从 **A-G** 数列出发要容易些。

但是，高斯可能采用的是双向思维，而且从 **A-G** 数列出发直接导出了极限 $M(a,b)$ 的椭圆积分表达式，所用的方法是大学本科《数理方程》中常见方法-----**幂级数法（一般用来求解变系数常微分方程的）**，这一点令我非常震撼！

下面我们就介绍下高斯的杰出思路：

考察 **A-G** 数列和极限 $M(a,b)$ 的结构，我们可以归纳出下述几条性质：

**1.** $M(a,a)=a$；

**2.** $M(ta,tb)=tM(a,b)$ ，$t\geq 0$（齐次性）；

**3.** $M(a,b)=M(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab})$，此为函数的加法公式，相当于说

$$M(a,b)=M(a_1,b_1)=M(a_2,b_2)=\cdots$$

性质 **3** 涉及的这个“**加法公式**”极为重要，要多留心。

高斯先考察函数 $M(1+x,1)$ 的幂级数展开

$$M(1+x,1)=1+Ax+Bx^2+Cx^3+\cdots \tag{2}$$

由性质 **3** 中的加法公式，知

$$M(1+x,1)=M(1+\tfrac{1}{2}x,\sqrt{1+x}) \tag{3}$$

为去掉根号表达式，高斯考虑变换 $x=2t+t^2$，代入（**3**）得

$$M(1+x,1)=M(1+t+\frac{t^2}{2},1+t)=(1+t)M(1+\frac{t^2}{2(1+t)},1)$$

由以上各式得

$$1+A(2t+t^2)+B(2t+t^2)^2+C(2t+t^2)^3+\cdots$$
$$=(1+t)+A\frac{t^2}{2}+B\frac{t^4}{4(1+t)}+C\frac{t^6}{8(1+t)^2}+\cdots$$

高斯将上式右边各项做二项级数展开，并与左边比较各项系数，通过硬算依次解得

$$A=\frac{1}{2},B=-\frac{1}{16},C=\frac{1}{32},D=-\frac{21}{1024},E=\frac{31}{2048},\cdots$$

这样就在形式上可以确定了幂级数$M(1+x,1)$的各项系数，及其级数表达式

$$M(1+x,1)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{32}x^3-\frac{21}{1024}x^4+\cdots \tag{4}$$

某种意义上，我们也求出了 **A-G** 数列的形式极限$M(a,b)$，但尚不能与椭圆积分建立联系。

这时体现了高斯的耐心，他继续考察函数$M(1+x,1-x)$，由性质 **3** 得

$$M(1+x,1-x)=(1-x)M(1+\frac{2x}{1-x},1)$$

再将$\frac{2x}{1-x}$做级数展开并利用（**4**），得

$$M(1+x,1-x)=1-\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{64}x^4-\frac{11}{256}x^6-\cdots$$

似乎有些规律了，高斯同时考察了该函数级数倒数的展开（耐心的体现），奇迹发生了！有非常整齐的结果：

$$\frac{1}{M(1+x,1-x)}=1+\frac{1}{4}x^2+\frac{9}{64}x^4+\frac{25}{256}x^6+\cdots \tag{5}$$

此前，根据勒让德等人在椭圆积分方面的研究结果，第一类椭圆积分的标准型为

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

其中参数$0<k^2<1$．将被积函数对$k^2$做二项级数展开，再对$\varphi$逐次积分，计算得

$$E(k)=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\frac{25}{256}k^6+\cdots\right)$$

通过将上式与（**5**）式对比，高斯猜想

$$E(k)=\frac{\pi}{2M(1+k,1-k)}$$

取$k=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$，再利用加法公式和齐次性，得

$$M(1+k,1-k)=M(1,\sqrt{1-k^2})=M(1,b/a)=M(a,b)/a$$

代回$E(k)$的积分表达式，可得

$$M(a,b)=\frac{a\pi}{2E(k)}$$

经过简单的变换，表示成积分形式

$$G(a,b)=\frac{1}{a}E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}$$

其中$G(a,b)=\dfrac{\pi}{2M(a,b)}$，这样我们就建立了 **A-G** 平均数列极限$M(a,b)$与椭圆积分之间的联系，一个优美而深刻的表达式！

需要指出的是上面使用的技巧是**“形式幂级数法”**，尽管高斯在论证过程中将变量$x,t$限制在$(-1,1)$内（出于级数收敛性的考虑），但在数学上，我们目前还没有证明函数$M(1+x,1)$可以展开成幂级数，故称之为“形式幂级数法”。但我们**“猜出”**极限的表达式后，有了明确方向，总是可以验证的（文章开头那个积分变换的证明是严格的）。

**笔者的一点感想：**

**1.** 知道极限表达式后，结论总是可以验证的；

**2.** 高斯的思维痕迹大致是：推导出关于 **M** 的一个等式，将 **M** 展开成幂级数并代入等式确定系数。通过大量的硬算和孜孜不倦刨根问底的精神找到了 **A-G** 数列与椭圆积分的联系；

**3.** 科研实践表面，现实状况多是“连猜带证（形式和探索性计算或推导）”，通过大量的试算（数值实验）来试图发现和归纳一些规律。考虑到高斯得到正确结论后尚且有这么大的计算量，之前探索性计算量可想而知，记得华老称高斯为老谋深“算”；

**4.** 发现某个定理 **C** 的路径是 **A**，而证明的路径也许是 **B**，若 **A** 和 **B** 看不出

太多的联系就可能杯具了。事实是，教材多采取证明 **B**，而舍弃（有意或无意）探索 **A**。后果：我可以验证 **B** 是对的，但我实在不知道 **C** 是怎么想到的。而那个同样重要的 **A** 只能隐藏在深处，不为学生所知……

**5.** 单纯的计算意义不大，研究者要凭借自己的知识和经验来寻找“规律”，这需要一定知识储备，一定工作量，可能还要有神来之笔（**God's help**）。

**6.** 单纯的计算意义不大不代表不需要计算，实际上只要多翻阅下《**高斯全集**》（网上有电子版的，拉丁文）就会发现高斯很爱“硬算”，这里的硬算包含着大量纯计算和形式硬推导（如幂级数乘法）。需要说明的是，那个时代无论牛顿、欧拉，还是高斯都喜欢用级数来推导发现新的结论，这应该引起我们在大学学习的注意。

# 多读一些著名定理

*SCIbird*

**说明**：鉴于笔者时间和精力有限，文章小错误难免。因此笔者建议读者最好将文章中的结论动手推导一遍，相信必有收获。光看不练，等于白看。

笔者习惯将本科以及本科以下阶段称为少年阶段，这个阶段的学习和梦想其实是最大胆的，谁不曾没有梦想将来去证明一些大定理。不过随着学习的深入，大多数人风格上逐渐趋于谨慎和保守，最终守在一小块土地上精耕细作。这是一种务实的态度，某种程度上也有些无奈。

所以，趁着同学少年，意气风发时，多读一些著名定理就十分必要了。搞数学有时候也需要一种疯狂的执着精神，就像黑客一样。当然，多数著名定理的证明需要引入一些高深的数学工具，特别是现代数学中那些大定理，即便是准确表述也是很困难的（涉及概念也较多）。不过，有些著名定理（如素数定理和不动点定理等）经过后人的不断努力挖掘，避免了引进比较高深的数学工具，已经可以写进本科教材了。注意，这里并非强调一定要用高中数学来证明的著名定理，那不现实。

笔者为什么推崇《**数学分析新讲**》一书，除了教材本身写的平易近人之外，还有一个吸引笔者的地方，那就是《新讲》收录进很多著名定理，如：

1. 万有引力定理与开普勒三定律；
2. 代数基本定理；
3. 布劳威尔不动点定理；
4. 斯通-魏尔斯特拉斯定理；
5. 处处连续处处不可导函数；
6. 填满正方形的连续曲线；
7. 等周问题。

等等。按《新讲》作者张老师的说法：“*花费这么多时间和精力学习微积分，学完之后究竟能做哪些事情？好像除了求极值、求面积体积之外，就什么也不会了。笔者写这套书，就是想或多或少地改变一下这种状况。*”

当年对张老师的这些话，有点感觉，但不深刻。随着水平的不断提高，对这老师的这句话感悟越来越深。笔者高一时就已经知道了牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

并且当时能熟练计算一些涉及多项式和三角函数的简单积分（太复杂的形式就算不出来了）。当时以自己能计算一些复杂曲边梯形面积和旋转体体积（别人不会）而自傲，顺便也能解决一下简单的变力做功问题。一直到大一，笔者一直以为微积分只能干这些活儿。

大二时看到了两本书《**数学分析新讲**》和《**数理方程与特殊函数**》，这两本书涉及了许多较大定理，涉及很多数学工具综合应用，使笔者意识到原来微积分的威力不仅仅在于求极值、面积和体积啊，真是井底之蛙！这是自高一自学微积分以来，认识上的第二次飞跃。

上面提到的牛莱公式是可以推广到**Lebesgue**积分上的，若 $f(x)$ 是**L**可积的，且除去有限个例外点之外有 $F'(x) = f(x)$，则牛莱公式仍然成立。特别地，学过实变函数的读者还知道，存在一个“**康托三分集函数**”，除去一个**不可数**的**零测集**之外有 $F'(x) = f(x)$，但牛莱公式不成立，这是一个经典反例。

但是，恐怕很多人不了解下面这个最强牛莱定理：

设 $F(x) \in C[a, b]$ 是连续函数，$f(x) \in L[a, b]$ 是 **Lebesgue** 可积的，若至多除去一个**可数集**之外，有 $F'(x) = f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

如果说 **Riemann** 积分中的牛莱公式相对平淡无味的话，那么上面的这个定理就是笔者所言的著名定理了。实际上，“至多除去一个**可数集**之外，有 $F'(x) = f(x)$”这个条件满足时，此时 $F(x)$ 是绝对连续的。细心读者也能发现，上面的定理可以反推出康托三分集函数反例中的零测集是不可数集。定理也暗示着我们，同样是零测集，但可数集和不可数零测集之间是有深刻差别的。

多看著名定理，你一般有这样的感觉：定理的证明往往涉及到很多数学工具的组合和应用，其中更包含许多创造性的想法。这一点从一般教材上是学不到的，因为教材通常出于逻辑考虑，基本上是一章一个内容，例子和习题大多是针对该章节内容的，跨章节的组合题很少。稍不注意就变成了只见树木，不见森林了。比如很多人感到中值定理题中的辅助函数很难想，其实如果联想的常微分方程中的一些方法，很多辅助函数的构造还是很自然的。

数学中泛泛而谈总是收获不多的，特别是本科阶段，最好不要养成这种习惯。可能 $SCIbird$ 最近在论坛上发了一些文章似乎就是泛泛而谈，确实如此，不过当年是新人的时候还是扎扎实实地推导过的，甚至动手进行排版打印。网上流传着一些 $SCIbird$ 做的北大研究生考试数学分析试题解答（**06**、**08**、**09** 和 **11**）就是证据，这些解答大部分都是有详细推导的。现在来看，有的分析解答写得也不甚完美，个别地方还是有些小错误的，所以读者必须亲手推导一遍才行。

最后，既然现身说法，那笔者就要示范一下，选取的例子是数学大师柯尔莫哥洛夫的少年成名之作----- $L[0,2\pi]$ **中几乎处处无界发散的 Fourier 级数反例**。证明细节选自汪林等编著的《实分析中的反例》一书，陈建功的《三角级数论》下册也收录进这个反例。

证明之前先说几句。证明本身没有用到什么高深的数学工具，只要认真读过《新讲》或其它数学分析教材，再加上一点《实变函数》知识（零测集，逐项积分定理）即可，知识范围基本上在大三以内。不过，证明本身比较复杂，技巧性的放缩估计比较多（硬推导）。按笔者的看法，读者应该紧紧抓住**“无界矩形脉冲函数序列”**（阶梯函数）这一主线，看看是如何从中巧妙地**“构造”**出调和级数的，柯尔莫哥洛夫这篇文章把阶梯函数的妙用发挥到极致了！

先从一个广义积分说起。通过适当的放缩，可以证明下面的广义积分是收敛的

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^6\sin^2 x}$$

注意到 $x>0$ 时，被积函数 $f(x)>0$，但是 $f(n\pi)=n\pi$，这说明 $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} f(x)=+\infty$ 成立。进一步研究函数图形发现 $f(x)$ 在 $x=n\pi$ 临近，函数图形急剧上升，其它地方急剧下降，这很像一个脉冲函数。更直观的例子是三角脉冲连续函数，图形是一些三角形，这些三角脉冲越来越窄，但峰值却越来越高，而每个三角形的面积却是有限的。

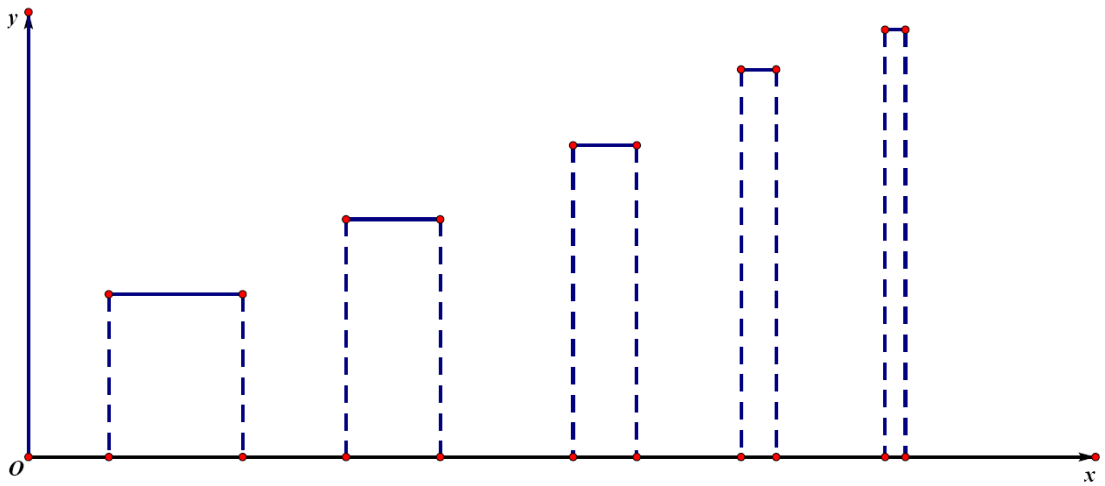
从直观化的角度看，面积可以看成高度与宽度两个变量的乘积，如果一个变量急剧增加，另一个变量急剧减少，那么乘积仍然可能是有限的。如果抛开连续性条件，可以构造一个**无界矩形脉冲函数序列**（阶梯函数）

$$f(x)=\frac{m_n}{n^2}\ ,x\in\left[n-\frac{1}{m_n},n+\frac{1}{m_n}\right],m_n=2^n;\quad f(x)=0\text{，其它}$$

这个矩形脉冲函数非负，满足极限上 $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} f(x)=+\infty$ 且广义积分

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum \frac{m_n}{n^2}\cdot\frac{2}{m_n} = 2\sum\frac{1}{n^2} < +\infty$$

笔者现在有个习惯，就是经常画一些示意图来帮助自己理解思考的问题，或者作为具体例子。无界矩形脉冲函数序列的图形大致如下：




**无界矩形脉冲函数序列**

从后文的证明可以看出“无界矩形脉冲函数序列”起到了奇兵的作用。下面开始硬推导了，要做好准备。构造的反例函数的直观想法是不能选择性态好的可积函数，要找一些很 **bt** 的可积函数，而“无界可积”函数就是这种 **bt** 函数。不过为了降低构造难度，可以先构造一个可积却无界的函数序列，先尝试入手。

很多教科书（《新讲》）都会给出 **Fourier** 级数逐点收敛性的证明，对函数 $f(x)$，记其前 $m+1$ 项和为 $S_m(x,f)$，通过适当的变换和求和，转化为一个狄利克雷积分

$$S_m(x,f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt$$

因此讨论 **Fourier** 级数的发散性，自然要考察上面的积分发散性。这个积分在 $t=x$ 点可能有奇异性，造成一些麻烦。柯尔莫哥洛夫（下称小柯同学）先考察一个简单情况，比如函数 $f(x)$ 在一个小闭区间 $J$ 上为常数，其它地方为 **0**，并取点 $x$ 为 $J$ 之外的点，这样避免了奇异性的讨论。于是得到

$$S_m(x,f) = \frac{1}{\pi}\int_J f(t)\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt$$

由 **Riemann-Lebesgue** 引理

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=0$$

当 $m\to\infty$ 时，上述积分趋于 **0.** 最简单的情况是 $f(x)$ 为常数，不过这是很平庸的结果。小柯同学考察一个动态过程，用一个函数序列 $\varphi_n(t)$ 代替 $f(t)$，而用闭区间序列 $J_i$ 代替闭区间 $J$，特别地，这里 $\varphi_n(t)$ 可能与 $m$ 有关，那么就不能简单地套用黎曼-勒贝格引理了，需要更精细地分析。

小柯同学最后选择的函数序列 $\varphi_n(t)$ 就是**无界矩形脉冲函数序列**，暂且要求

$$\int_{J_i}\varphi_n(t)\,dt=\frac{2}{n}$$

其它条件后面会一一说明。

在无数次似乎没有目的的试探性计算（期间有很多无用功）之后，小柯同学利用含绝对值不等式 $|a|=|b+a-b|\ge|b|-|a-b|$ 发现了一个十分重要的不等式关系：

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{J_i}\varphi_n(t)\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt\right|\\
=&\left|\int_{J_i}\varphi_n(t)\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(A-x)}{2\sin\frac{1}{2}(A-x)}\,dt+\int_{J_i}\varphi_n(t)\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt-\int_{J_i}\varphi_n(t)\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(A-x)}{2\sin\frac{1}{2}(A-x)}\,dt\right|\\
\ge&\left|\int_{J_i}\varphi_n(t)\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(A-x)}{2\sin\frac{1}{2}(A-x)}\,dt\right|-\left|\int_{J_i}\varphi_n(t)\left(\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}-\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(A-x)}{2\sin\frac{1}{2}(A-x)}\right)dt\right|
\end{aligned}$$

选择这样的 $A$，满足 $(m+\frac{1}{2})A=2\ell\pi$ 同时满足 $0<|A-x|\le r_i$，则上面第一项化为

$$\left|\int_{J_i}\varphi_n(t)\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(A-x)}{2\sin\frac{1}{2}(A-x)}\,dt\right|=\left|\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(A-x)}{2\sin\frac{1}{2}(A-x)}\right|\int_{J_i}\varphi_n(t)\,dt\ge\frac{2|\sin(m+\frac{1}{2})x|}{nr_i}$$

这里利用了不等式 $|\sin\frac{1}{2}(A-x)|\le\frac{1}{2}|A-x|\le\frac{1}{2}r_i$ 进行放缩，从后文中可以看到巧妙地设置 $A$ 和 $x$ 的取值范围，可以从 $nr_i$ 中可以**“构造”**出调和级数。

第二项积分的估计需要一些技巧，注意到下面恒等式

$$\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos mt=\frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}=:D_m(t)$$

由此不难得到导数不等式：$|D_m'(t)|\le m^2$.

令 $g(t)=D_m(t-x)$，利用拉格朗日中值定理得到

$$g(t)-g(A)=g'(\xi)(t-A)$$

代入到上面第二项积分中，得到不等式估计

$$\left|\int_{J_i}\varphi_n(t)\left(\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}-\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(A-x)}{2\sin\frac{1}{2}(A-x)}\right)dt\right|$$

$$=\left|\int_{J_i}\varphi_n(t)g'(\xi)(t-A)\,dt\right|\le m^2d\int_{J_i}\varphi_n(t)\,dt=\frac{2m^2d}{n}$$

这里 $0<|t-A|\le d$.

综合上面的结果，得到不等式估计：

$$\left|\int_{J_i}\varphi_n(t)\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt\right|\ge\frac{2|\sin(m+\frac{1}{2})x|}{nr_i}-\frac{2m^2d}{n}$$

写到这里看起来有些凌乱，不过细心推导一遍可以发现，都是一些常见的含绝对值不等式估计，最终得到上面的不等式。**而小柯同学想法的精妙之处，在于通过适当设置 $x,t,A$ 这三者之间的关系，使得上面的不等式中“出现”了调和级数**。具体构造工作十分具有技巧性，笔者相信但这是大量试探性（甚至多数没有意义）的艰苦计算后获得的。

**小柯引理**：对每个正整数 $n$，可以构造出函数序列 $\varphi_n(x)$ 和集合 $E_n\subset[0,2\pi]$，以及正实数 $M_n$ 和整数 $q_n$，满足列条件：

**1.** $\varphi_n(x)\ge 0$, $\int_0^{2\pi}\varphi_n(x)\,dx=2$；

**2.** $\varphi_n$ 在 $[0,2\pi]$ 上是有界变差函数；

**3.** 测度 $\lim\limits_{n\to\infty}m(E_n)=2\pi$, $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=\infty$；

**4.** 对于任意一点 $x_0\in E_n$，存在标号 $p_{n,x_0}\le q_n$，使得 $\varphi_n$ 在该点的 **Fourier** 级数部分和满足 $|S_{p_{n,x_0}}(x_0,\varphi_n)|\ge M_n$.

引理的证明是归纳构造式的。

在闭区间 $[0,2\pi]$ 上选取 $n$ 个点，记 $A_k=4k\pi/(2n+1)$，这里下标范围是 $k=1,2,\cdots,n$. 取**奇整数** $\lambda_1=1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，后面还需要补充一些假设条件。按如下方式定义一列数 $\{m_k\}$ 与有限闭区间序列 $J_k$：

$$m_1=n,\ 2m_k+1=\lambda_k(2n+1),\ J_k=\left[A_k-\frac{1}{m_k^2},A_k+\frac{1}{m_k^2}\right]$$

由此得到一个不等式 $m_k\ge n$.

再构造“**无界矩形脉冲函数序列**$\varphi_n(t)$”如下：

$$\varphi_n(t)=\begin{cases} m_k^2/n\,, & t\in J_k \\ 0\,, & t\in[0\,,2\pi]-\bigcup_{k=1}^{n}J_k \end{cases}$$

显然积分满足小柯引理中的 **1** 和 **2**

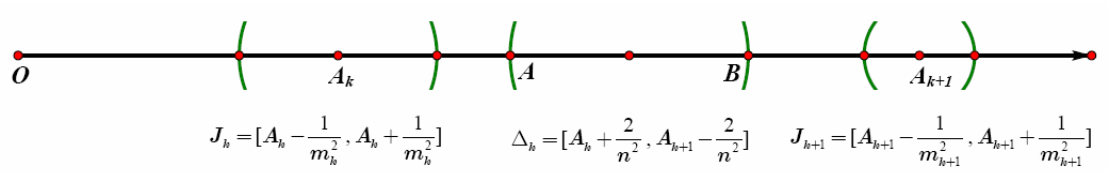
$$\int_{J_i}\varphi_n(t)\,dt=\frac{2}{n}$$

再此基础上，我们的目标是要构造一个正测度集$E$（测度尽可能大），使得$\forall x\in E$，对应 **Fourier** 级数部分和$S_m(x\,,f)$是无界数列。同时还应该使得$E$与闭区间序列$J_i$的交集为空。

于是，小柯同学定义闭区间序列$\{\Delta_i\}$

$$\Delta_i=\left[A_i+\frac{2}{n^2}\,,A_{i+1}-\frac{2}{n^2}\right]\,,\ i=1\,,2\,,\cdots,n-1$$

建议读者多画画图，比如下图：




不难发现以下性质：当整数$n$固定时，有限闭区间序列$J_k$的半径是逐渐递减的。而有限闭区间序列$\Delta_k$的半径保持不变。且两个闭区间序列$\{\Delta_i\}$与$\{J_k\}$**互不相交**。这里选择增量$1/m_k^2$和$2/n^2$是出于收敛性考虑。

有了上面的铺垫可以证明小柯引理了。假设$m_1\,,m_2\,,\cdots,m_{k-1}$已经取定，由 **Riemann-Lebesgue 引理**可知，可以选取充分大的整数$m_k$，使得$\forall x\in\Delta_{k-1}$有

$$\left|\int_{\bigcup_{i=1}^{k-1}J_i}\varphi_n(t)\frac{\sin(m_k+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt\right|\le 1$$

这样选择$x\,,t$不会使得分母产生奇异性。因为$\forall x\in\Delta_{k-1}$以及$\forall t\in\bigcup_{i=1}^{k-1}J_i$时，距离

$|t-x|\ge\rho_n>0$，其中常数$\rho_n$仅与$n$有关。

于是可以用归纳法如此构造出数列$\{m_i\}$.

上面讨论的是$i<k$的情形。当$i\ge k$且$\forall x\in\Delta_{k-1}$，可以得到距离关系式

$$0<A_i-x\le A_i-A_{k-1}=(i-k+1)\frac{4\pi}{2n+1}$$

$$\frac{2m_k+1}{2}(A_i-A_k)=(i-k)2\pi\lambda_k$$

$$|t-A_i|\le\frac{1}{m_i^2}$$

对照前文，取$A=A_i,r_i=A_i-A_{k-1}=(i-k+1)\frac{4\pi}{2n+1}$以及$d=\frac{1}{m_i^2}$，得到**核心不等式估计**（注意$i\ge k$, $m_i\ge m_k$）

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{J_i}\varphi_n(t)\frac{\sin(m_k+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}dt\right|\ge\frac{2|\sin(m_k+\frac{1}{2})x|}{n\pi r_i}-\frac{2m_k^2d}{n\pi}\ge\frac{|\sin(m_k+\frac{1}{2})x|}{\pi^2(i-k+1)}-\frac{2}{n\pi}$$

注意上面不等式中第一项里“**出现**”了与$i$有关的调和级数，后面证明级数发散时与这一性质有关。

我们得到函数$\varphi_n(t)$在点$x\in\Delta_{k-1}$, $k=2,3,\cdots,n$处的 **Fourier** 级数部分和

$$|S_{m_k}(x,\varphi_n)|=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_n(t)\frac{\sin(m_k+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}dt\right|=\left|\int_{\bigcup_{i=1}^{k-1}J_i}+\int_{\bigcup_{i=k}^{n}J_i}\right|$$

$$\ge\frac{|\sin(m_k+\frac{1}{2})x|}{\pi^2}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i-k+1}-\frac{2}{\pi}-1>\frac{|\sin(m_k+\frac{1}{2})x|}{\pi^2}\sum_{i=1}^{n-k+1}\frac{1}{i}-2$$

由上面不等式可知，当$2\le k\le n-\sqrt{n}$，$x\in\Delta_{k-1}$时

$$|S_{m_k}(x,\varphi_n)|\ge\frac{1}{2\pi^2}|\sin(m_k+\tfrac{1}{2})x|\ln n-2$$

这里利用了调和级数里的近似关系（再取$k=n-\sqrt{n}$）

$$\sum_{i=1}^{n-k+1}\frac{1}{i}\ge\ln(n-k+1)$$

由上面推导可以看出，为研究发散性，可考虑$\Delta_{k-1}$的满足下面条件的子集：

$$\sigma_{k-1}=\{x\in\Delta_{k-1}:\ \frac{1}{2\pi^2}|\sin(m_k+\tfrac{1}{2})x|\ge\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\}$$

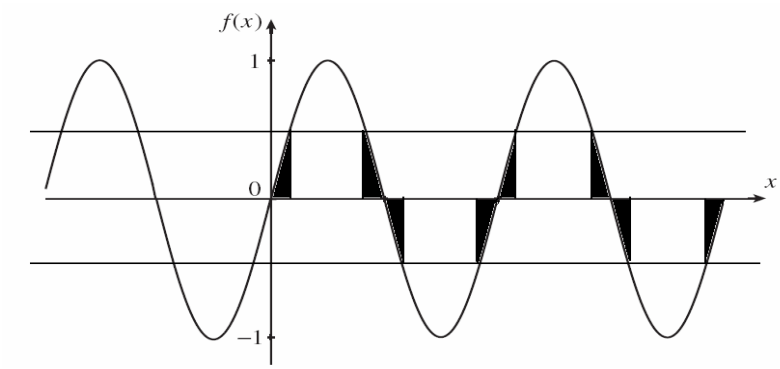
令 $q_n = m_n$，$M_n = \sqrt{\ln n} - 2$ 以及 $E_n = \bigcup_{i=1}^{n-[\sqrt{n}]-1} \sigma_i$，则 $\lim_{n\to\infty} M_n = \infty$．进一步可以证明测度 $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = 2\pi$．

一种证明思路是考察满足下面不等式的点集

$$\frac{1}{2\pi^2}|\sin(m_k + \tfrac{1}{2})x| \le \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \qquad (*)$$

动手画一画图像就知道，满足上面不等式的点集，是零点周围的一些对称闭区间的并集。其中零点指下面函数的零点

$$y = \sin(m_k + \tfrac{1}{2})x = \sin \lambda_k (2n+1)\frac{x}{2}$$




满足不等式 $(*)$ 的点集（黑色部分）

每个小区间中恰有一个零点，小闭区间长度都相等，记为 $\delta$，则不难算出

$$\delta = 2\frac{\arcsin \frac{2\pi^2}{\sqrt{\ln n}}}{\lambda_k(2n+1)/2} = O\left(\frac{1}{\lambda_k n\sqrt{\ln n}}\right)$$

注意到函数

$$y = \sin(m_k + \tfrac{1}{2})x = \sin \lambda_k (2n+1)\frac{x}{2}$$

在区间 $[0, 2\pi]$ 上共有 $\lambda_k(2n+1)+1$ 个零点，且相邻两个零点的距离是 $2\pi/\lambda_k(2n+1)$，而区间 $\Delta_{k-1}$ 的长度为 $4\pi/(2n+1) - 4/n^2$． 所以函数 $y$ 在区间 $\Delta_{k-1}$ 上至多有 $N = O(\lambda_k)$ 个零点。

因此满足下面不等式

$$\frac{1}{2\pi^2}|\sin(m_k + \tfrac{1}{2})x| \le \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$$

的点集测度为

$$\delta N = O\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right)$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-[\sqrt{n}]-1}\left[\frac{4\pi}{2n+1} - \frac{4}{n^2} - O\left(\frac{1}{\lambda_k n\sqrt{\ln n}}\right)\right] = 2\pi$$

到此，我们证明了“小柯引理”。

引理证明之后可以考虑构造反例了。小柯同学的想法是把**无界矩形脉冲函数序列**$\varphi_n(t)$叠加到一起构造一个 **Lebesgue** 可积函数$\Phi(x)$，使得对应 **Fourier** 级数发散。注意到是函数序列$\varphi_n(t)$是无界的，因此必须设法加上一些系数来“约束”其行为，同时使得 **Fourier** 级数发散。

经过大量反复尝试之后，小柯同学找到了一种构造方法：

注意到$M_n \to \infty$，因此利用归纳法可以构造一个递增的子列$\{n_k\}$，满足：

**1.** 当$1 \le i \le k-1$时，$q_{n_i} \le \sqrt{M_{n_k}} / 2^k$；

**2.** $\sum_{i=1}^{k-1} \max_{m,x} |S_m(x, \varphi_{n_i})| \le \frac{1}{2}\sqrt{M_{n_k}}$

条件 **2** 成立用到这样一个结论：

因为$\varphi_{n_i}$是有界变差函数，所以存在正的常数$B_{n_i}$，满足

$$\max_{m,x} |S_m(x, \varphi_{n_i})| \le B_{n_i} < \infty$$

定义“**小柯函数**”

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n_k}(x)}{\sqrt{M_{n_k}}}$$

根据实变函数中的 **Levi** 定理，非负 **L** 可积递增函数列$f_n$的积分有界，即

$$\sup \int_E f_n < \infty$$

则**存在**极限函数$f$，使得$f_n$**几乎处处收敛**到函数$f$，且

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

将 **Levi** 定理应用到小柯函数$\Phi(x)$上即可，得到

$$S_i(x,\Phi)=\sum_{k=1}^{\infty}S_i(x,\varphi_{n_k})/\sqrt{M_{n_k}}$$

设 $E=\overline{\lim_{k\to\infty}}E_{n_k}$，则 $m(E)=2\pi$．根据上极限定义，$\forall x_0\in E$，则 $x_0\in E_{n_j}$ 对无穷多个 $j$ 成立。我们证明 $\Phi$ 的 **Fourier** 级数在 $x_0$ 点发散。

由等式

$$S_{p_j,x_0}(x_0,\Phi)=\sum_{k=1}^{j-1}S_{p_j,x_0}(x_0,\varphi_{n_k})/\sqrt{M_{n_k}}+S_{p_j,x_0}(x_0,\varphi_{n_j})/\sqrt{M_{n_j}}$$
$$+\sum_{k=j+1}^{\infty}S_{p_j,x_0}(x_0,\varphi_{n_k})/\sqrt{M_{n_k}}$$

以及不等式

$$|S_k(x,f)|\le(k+\tfrac{1}{2})\int_0^{2\pi}|f(t)|\,dt$$

可知

$$\begin{aligned}|S_{p_j,x_0}(x_0,\Phi)|&\ge|S_{p_j,x_0}(x_0,\varphi_{n_j})|/\sqrt{M_{n_j}}\\&\quad-\sum_{k=1}^{j-1}|S_{p_j,x_0}(x_0,\varphi_{n_k})|/\sqrt{M_{n_k}}-\sum_{k=j+1}^{\infty}|S_{p_j,x_0}(x_0,\varphi_{n_k})|/\sqrt{M_{n_k}}\\&\ge\sqrt{M_{n_j}}-\frac{1}{2}\sqrt{M_{n_j}}-\sum_{k=j+1}^{\infty}2(p_{n_j}+\tfrac{1}{2})/\sqrt{M_{n_k}}\end{aligned}$$

但是，根据条件 **1** 可知

$$2p_{n_j}/\sqrt{M_{n_k}}\le1/2^{k-1}\text{，特别地，}1/\sqrt{M_{n_k}}\le1/2^k$$

这说明上面不等式最后一项对应的级数是收敛的。

由 $\sqrt{M_{n_j}}\to\infty$ 可知，上极限 $\overline{\lim_{i\to\infty}}|S_i(x_0,\Phi)|=+\infty$，$\forall x_0\in E$．

**于是小柯函数 $\Phi(x)\in L[0,2\pi]$，但其对应的 Fourier 级数在 $[0,2\pi]$ 上几乎处处无界发散。**

**评注：**上面的柯尔莫哥洛夫函数 $\Phi(x)$ 的构造十分具有技巧性，属于硬分析估计。但另一方面，阶梯函数算是比较简单的基本函数了，本文这个例子可谓把阶梯函数的技巧发挥到极致。

更为难得的是，本文不需要太深的数学知识，可读性比较强。笔者了解这方面的后续工作如下：柯尔莫哥洛夫后来还构造了一个处处发散的 **Fourier** 级数，那就更复杂了。卡尔森证明了 $L^2[0,2\pi]$ 上的 **Fourier** 级数几乎处处收敛到自身，并因此获得了菲尔兹奖。作为推论，连续函数的 **Fourier** 级数几乎处处收敛到自身。后来有人进一步推广到 $L^p[0,2\pi]$ $(p>1)$ 空间，定理仍然成立。

写到这里，想起了网上一个故事，据说是关于米尔诺或丹齐格的，大意是，一位大一新生上课迟到了，看到黑板上有一道题，以为是课后作业，就抄下来课下做。结果花费了好些天才做出来，并向老师抱怨作业题太难了。没想到老师激动地告诉他，这不是课后作业，而是一个未解的著名猜想。该学生上课迟到没听见前半部分，误以为是作业，结果阴差阳错地做出来了。至于故事的真实性，恐怕无从考证了。

这类故事是说，本科学生也可以做出世界级的工作。当然，非常稀少。古人也有这方面的代表人物，比如伽罗瓦。根据笔者阅读柯尔莫哥洛夫英文文集第一卷的感受，可以肯定的是他确实是在大三的时候构造出本文的著名反例，并因此世界扬名。比起米尔诺那个飘渺的故事，本文的反例确实真实的。

## 1. A FOURIER-LEBESGUE SERIES DIVERGENT ALMOST EVERYWHERE*

The purpose of this paper is to give an *example of a summable*[1] *function with an almost everywhere* (i.e. everywhere except on a set of measure zero) *divergent Fourier series*).

柯尔莫哥洛夫构造反例的想法也不是偶然的，他的老师鲁金是函数论方面的大牛，曾提出一个猜想：存在连续函数在某个正测度集上发散。当然，卡尔森的工作说明这个猜想是不正确的。柯尔莫哥洛夫似乎在大二时参加了莫大数学系的一个三角级数讨论班，他本科的很多文章都是关于三角级数的。所以本文的反例也不能完全说是天外飞仙，灵光一现的天才灵感。是有很多前期的工作作为铺垫的。

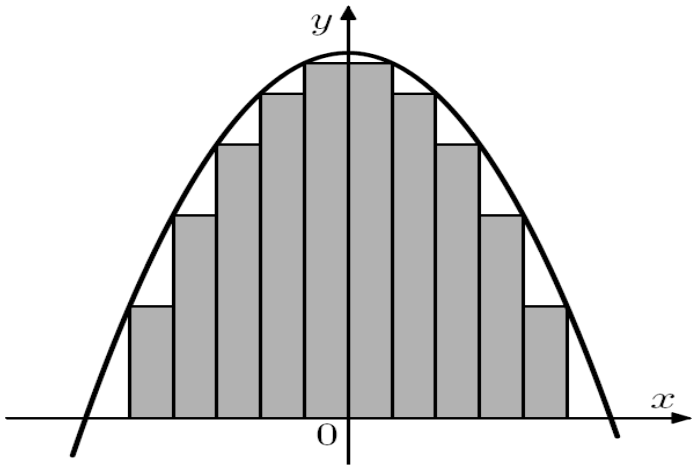
# 发掘几何直观

***SCIbird***

**说明**：鉴于笔者时间和精力有限，文章小错误难免。因此笔者建议读者最好将文章中的结论动手推导一遍，相信必有收获。光看不练，等于白看。

数学分析之所以上手很容易的一个原因是，其低维（**1**、**2**、**3** 维）情况有很好的几何直观，可以用作类比，至少理解定理的表述比较容易（证明难度是另外的问题）。所以对一些分析定理或公式**感到困惑，而无法前进时，那么最好退一步，发掘一下其低维（特别是 2 维）情况的几何直观**，这样有助于理解定理的意义。当然，**也可以用低维（特别是 2 维）情况的几何直观作为例子来验证分析定理（结论）本身的合理性**。这些都是很好的学习习惯。

比如导数可视作切线的斜率，积分可视作求曲边梯形面积。书上举的积分例子通常是求抛物线与 $x$ 轴所围图形面积，这也是积分的的最原始思想体现。




抛物线 $y=1-x^2$

书中使用方法就是经典的**“矩形分割法”**（**Riemann** 和）。根据经验和直觉，只要矩形越来越密，则与所求面积越来越接近，这就是积分法的原始思想。

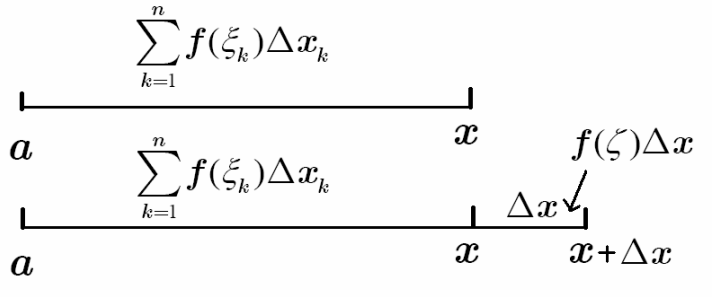
当然，能看出微分与积分两者之间是互逆运算关系并不简单（针对连续函数）。积分一般定义为 **Riemann** 和的极限（这个极限有点特殊）

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max\{\Delta x_i\}\to 0}\sum f(\xi_i)\Delta x_i$$

这个极限与 **Riemann** 和的分割方法选取无关。

换个视角，考虑变上限积分。如下图对区间 $[a,x+\Delta x]$ 上的分割，求 **Riemann**

和实际上只是在$[a,x]$的 **Riemann** 和基础上增加了$f(\zeta)\Delta x$，所以两个 **Riemann** 和的差商的极限是$f(\zeta)$，即$\Delta x\to 0$，自然有$\zeta\to x$，于是$f(\zeta)\to f(x)$（这里利用了函数的连续性）。




上述角度说明：在 **Riemann** 的定义过程中，**我们已经把$f(x)\Delta x$（开始就可以取$\zeta=x$）悄悄塞进去了，差商过程只不过把$f(x)\Delta x$分离出来再把$\Delta x$消掉，自然剩下$f(x)$了**，因此从定积分的定义角度看：变上限定积分是$f(x)$的一个原函数其实是非常自然的事情。由此得到微积分基本定理：

设$f(x)\in R[a,b]$，且存在连续函数$F(x)\in C[a,b]$满足$F'(x)=f(x)$，即$f(x)$存在原函数$F(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

因为以上公式指出了微分运算与积分运算之间的互逆关系，所以被称作**微积分基本定理**。证明不难，直接利用 **Riemann** 积分的定义即可，任取区间$[a,b]$的一个分割$\{x_i\}$，并记$x_0=a,\ x_n=b$，则由拉格朗日中值定理，得

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=1}^{n}F(x_k)-F(x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$$

注意到等式右边即是 **Riemann** 和，取极限并利用极限的唯一性，得

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$$

这个证明并不复杂，一些工科教材也讲述定积分 **Riemann** 和的定义，但不知道为什么多数工科微积分教材没有收录进去。

不过笔者感觉上面的几何解释在理解“微分与积分两者之间是互逆运算关系”时，仍然不够自然。笔者认为，最自然的还是物理的例子---距离&速度。**从物理角度理解这个公式可能比几何更自然些。**

设直线上单向连续运动质点$t$时刻对应的距离函数为$S(t)$，问在$[t_1,t_2]$这段时间内质点运行的距离？将$[t_1,t_2]$分成很多小时间段，每小段时间如此之短，对应速度可视作不变，则

$$S(t) \approx \sum_i v(t_i)\Delta t_i \to \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

不难理解 $S'(t) = v(t)$ 关系，即

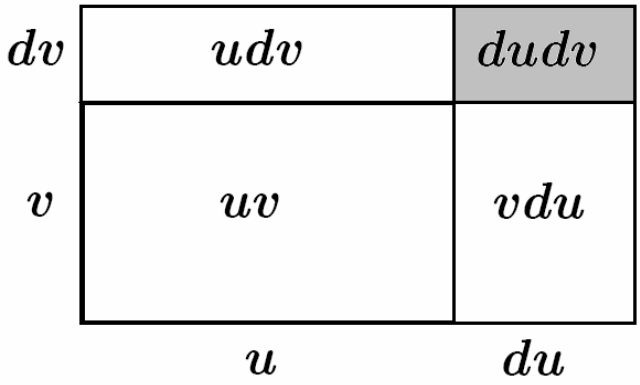
$$v(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = S'(t)$$

以上一种比较自然地理解牛顿-莱布尼茨公式的思路。说到这里，再说明一下，**物理的例子也可以视作几何直观的一种。**

**很多时候，不一定有现成的几何模型，这就需要发挥想象力去构造一个几何模型。**除去个别天赋异禀的人之外（笔者见过这种人），这种能力需要长时间的培养与训练。比如理解函数乘积的微分公式

$$d(uv) = udv + vdu$$

上面这种性质称为导数性质或莱布尼茨性质。可以抽象出下图来理解




根据微分的基本思想，略去高阶小量 $dudv$，依照定义显然有

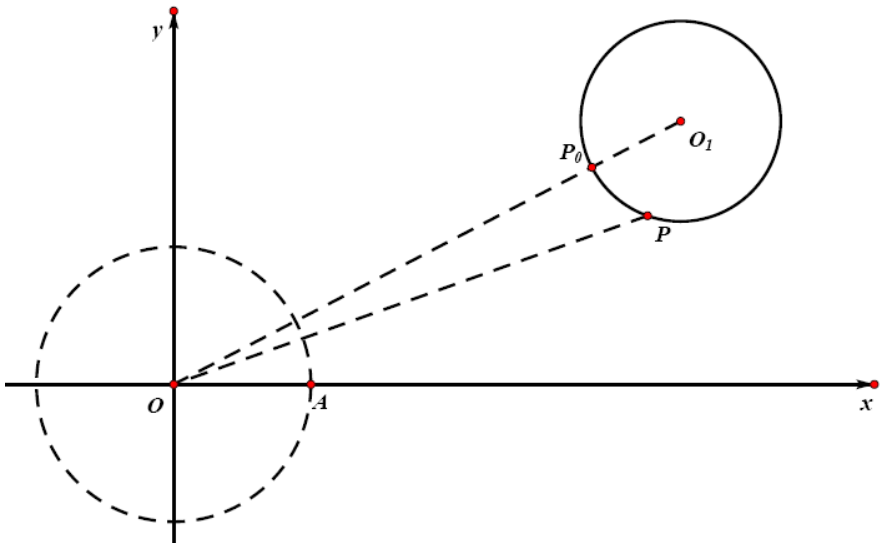
$$d(uv) = udv + vdu$$

最后再补充一个经典例子---**拉格朗日乘数法**。该方法是处理条件极值问题的首选方法，实用性比较强。条件极值问题是一个很常见问题，现实世界中的大多数问题（无论数学，物理，还是其它问题）都是有条件的。

这个方法的原理并不难，就像数学归纳法一样，框架现成的，直接拿来主义就行了。至于解偏导数方程求驻点，那是另外一个问题了。最令初学者（甚至学过数分很多年的人）感到困惑的地方之一是----如何想出**拉格朗日乘数法**这么巧妙的方法呢？

理解的途径之一是几何途径。为了降低难度，便于理解**拉格朗日乘数法**的几何思想，先看一个经典的高中问题。

如下图，给定圆$\Gamma$: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$，$P$为圆$\Gamma$上的动点，圆$\Gamma$的圆心为$O_1$，$O$为坐标原点。求线段$|OP|$的最大值和最小值。




**一道高中常见的条件极值问题**

这道题的难度不大，关键在于其背后几何思想。以微积分的角度看，记$P$点坐标为$(x,y)$，$f(x,y)=x^2+y^2=|OP|^2$，则原问题就是一个条件极值问题。

**求函数$f(x,y)=x^2+y^2$在约束条件$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$下的极值。**

当然可以用拉格朗日乘数法来求解。但站在几何角度看，做一个辅助**动圆**$\Gamma'$: $x^2+y^2=r^2$同时满足圆$\Gamma$与圆$\Gamma'$**相交非空**。不难看出，**两圆相切时，动径$r$取得极值**。这里的**动圆**$\Gamma'$: $x^2+y^2=r^2$是为了辅助思考而引进的，所以图中用虚线表示。我们抓住最核心的两点：

**1. 辅助动圆；2. 极值点对应相切点。**

笔者正是抓住这两个核心想法，才想通拉格朗日乘数法的。笔者最初的想法是考虑函数$w=f(x,y,z)$在约束条件$M:g(x,y,z)=0$下的极值问题。想法也是几何方式的思考。如同上面的例子，自己考虑的是**“动曲面”**（也称**等高面**）

$$\sum_C=\{(x,y,z):\ f(x,y,z)=C\ \ ,C\in\mathbf{R}\}$$

其中$C$是常数。显然，$\sum_C$是一族曲面。

接下来考虑曲面族中，**使得$\sum_C\cap\ g(x,y,z)=0$非空的那些曲面**。假设点$P(x_0,y_0,z_0)\in g(x,y,z)=0$使得$f|_M(P)$是**极值点**。类比上面两个圆的例子，我们自然猜想：

**曲面族$\sum_C$中的曲面$f(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)$与$M:g(x,y,z)=0$相切**换句话说，可猜想两者在点$P(x_0,y_0,z_0)$处有共同的切平面。

$M:g(x,y,z)=0$**在$P$点的切平面**方程（点法式）为：

$$g_x(P)(x-x_0)+g_y(P)(y-y_0)+g_z(P)(z-z_0)=0$$

接下来如何证明曲面$f(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)$**在$P$点也是这个切平面。**

后来想到了**切向量方法（也是切平面的定义）**。考虑曲面$M:g(x,y,z)=0$上，点$P(x_0,y_0,z_0)$附近的一条曲线

$$\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$$

其中，**曲线$\gamma(t)$是在曲面$M:g(x,y,z)=0$上，满足$\gamma(0)=(x_0,y_0,z_0)$，对应$P$点切向量为：**

$$\gamma'(0)=(\dot{x}(0),\dot{y}(0),\dot{z}(0))$$

设函数$\varphi(t)=f(x(t),y(t),z(t))$，则$t=0$是$\varphi(t)$的**极值点**，故$\varphi'(0)=0$，即

$$f_x(P)\dot{x}(0)+f_y(P)\dot{y}(0)+f_z(P)\dot{z}(0)=0$$

当时发现$f(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)$**在$P$点的法向量就是**

$$\{f_x(P),f_y(P),f_z(P)\}$$

而曲线$\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$可以取任意方向，即切向量

$$\gamma'(0)=(\dot{x}(0),\dot{y}(0),\dot{z}(0))$$

方向可以任意。**$f(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)$在$P$点的法向量与任意切向量$\gamma'(0)$垂直，说明$\gamma'(0)$也在$f(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)$在$P$点的切平面上。**

**认识到两个曲面在极值$P$点有共同的切平面，于是其法向量是平行的。**前面两圆的例子也支持这一点。因此极值点$P$**应满足法向量方程：**

$$\nabla f(P)=k\nabla g(P)$$

为了整齐起见，习惯上记$\lambda=-k$，并设拉格朗日函数

$$F(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$$

显然

$$\nabla F(P)=0 \;\Rightarrow\; \nabla f(P)=-\lambda\nabla g(P)$$

**评注：**以上是从几何角度来思考拉格朗日乘数法，指出构造拉格朗日函数想法的几何源头。上面的内容只是探索性讨论，很多地方还需要严格证明的。笔者最初查看了很多数学分析教材，都没有上述想法，等后来自己想明白后，偶然间在卓里奇的《数学分析》上册中找到了类似想法，而且写的更详细，推荐大家去看一下。

# 类比是一种重要的数学思维

*SCIbird*

**说明**：鉴于笔者时间和精力有限，文章小错误难免。因此笔者建议读者最好将文章中的结论动手推导一遍，相信必有收获。光看不练，等于白看。

人们认识事物的一个常用的方法是找熟悉的东西来模仿，一般要求未知的对象与已知的对象有某些相似性，由此推断两者之间具有相似的特征或结构。这种方法其实就是类比方法了，这是一种重要的数学思维。

进入大学以后，数学体系已经开始庞杂了，即便是数学分析，其延伸分支可以包括复变函数、实变函数、**ODE**、**PDE**、微分几何，甚至泛函分析等等。知识容量大，记忆内容也多。面对这种当下现状，类比思维就很重要了。就数学分析而言，细心一点会发现，很多概念和定理具有相似性，如收敛与一致收敛、连续与一致连续、多项式与幂级数、罗比达法则与 **Stoltz** 定理、**Dini** 定理与 **Levi** 定理、**Fourier** 级数与 **Fourier** 变换等等。如果读者学习的时候留意这些相似性，那么在探索和记忆过程中，就能减少一些困难。

不过，类比是一种主观的不充分的似真推理。在数学中经常与猜想、形式推导等方法相混合。所以类比得到的结论不总是正确的，这就需要严格的数学证明来跟进补充。应该说，类比思维需要一定想象力和经验积累，所谓厚积薄发。

本文用三个例子：**Lebesgue** 测度、**Fourier** 变换和椭圆函数加法公式来说明类比方法，读者需要用心体会。

**Lebesgue** 测度的想法其实比较自然，主要是想推广长度、面积和体积这些基本概念到一般情况。为简单起见，这里只讲一维情形。诚然，对于比较规整图形，求长度、面积等容易的多。但对有一些比较 **bt** 的点集，如何定义“体积”概念就是一个首要问题。假设对点集 $E$，有一个惟一的非负实数 $m(E)$ 与之对应，它是体积的推广，姑且取个名词叫“**测度**”。测度既然是体积的推广，它应该兼容原有的体积特征，而不产生矛盾，这是前提。即应满足：

1. **非负性**，即 $m(E)\geq 0$；
2. **有限可加性**，即 $E\cap F=\phi$（空集）时，有 $m(E\cup F)=m(E)+m(F)$，这种性质可以推广到有限个情形；

**3. 正则性**，即对区间$[0,1]$，其测度$m([0,1])=1$且$m([a,b])=b-a$.

这里允许闭区间退化为一点，即$b=a$情况，于是对单个点$P$有$m(P)=0$. 性质 **3** 相当于引入一个基准（单位），便于其它测度值与之比较。这很像人民币 **100** 元、**50** 元、**20** 元、**10** 元和 **1** 元，是基本计价标准。

如果想要推广体积概念，首先需要考虑能否推广（在兼容意义下）上述 **3** 个基本性质。不难看出性质 **1** 和性质 **3** 无法再推广了，剩下的就是性质 **2** 的推广了。**Lebesgue** 当初将**有限可加性推广的可数可加性**，这是一个质的飞跃，也是 **Lebesgue** 测度理论的关键地方。

学完 **Lebesgue** 测度回过头想想，如果推广有限可加性到无穷，那么只能到可数无穷为止。否则的话对单个点有$m(P)=0$（这是基本性质），而区间$[0,1]$有不可数个点构成，且不说“不可数加法”如何定义，而相加结果到底是 **0** 还是 **1**，也会引起混乱，与传统认识长度相违背。所以干脆到可数可加性为止。

于是抽象出**勒贝格测度公理**：

设$\mathcal{A}=\{E\}$是直线 **R** 上的一个**集合族**，使得对每个$E\in\mathcal{A}$，都有**惟一**的实数$m(E)$与之对应，满足：

**1. 非负性**，即$m(E)\geq 0$；

**2. 可数可加性**，即如果$E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots$两两不相交，则

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=m(E_1)+m(E_2)+\cdots+m(E_n)+\cdots$$

**3. 正则性**，即$m([a,b])=b-a$.

但光有干巴巴的 **3** 条公理，似乎还是寸步难行，到底测度$m(E)$是什么样子呢？这需要进一步引入 **L** 测度定义。幸好当年的若尔当测度（有限可加性）在这方面已经有了探索性的想法。比如求一个图形面积，可以画出一些矩形格子，满足覆盖住图形。然后把矩形加细，仍然覆盖住图形。这样能逐步逼近图形面积。或者干脆直接类比 **Riemann** 积分中达布上和概念。

借助上述类比，可推广**外测度**概念。对于点集$E\in\mathcal{A}$，选择可数个**开区间**$I_1,I_2,\cdots,I_n,\cdots$的并集，满足

$$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$$

然后令

$$m^*(E)=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\}$$

这是一种非常自然的想法。这种定义 $m^*(E)$ 称为**外测度**。

当年讨论若尔当测度是已经有了外测度和内测度的想法了，直观说是**外逼近**和**内逼近**，简称**“外压内挤”**。读者也可以类比 **Riemann** 积分理论中的**达布上和**与**达布下和**。

不过 **Lebesgue** 遇到的困难可能更大，它所考虑到的图形可能没有“内部”（如有理数集）。外逼近可以满足（因为是覆盖），而如何处理内逼近就是一个难题了。**Lebesgue** 突发奇想：”**内逼近**“**想法推广是对其补集外逼近**。具体说，设 $E\subset[a,b]$，$E$ 在 $[a,b]$ 中的**相对补集**定义为：

$$E^C=[a,b]-E$$

于是，自然**将外测度概念应用到相对补集上，诱导出内测度概念**

$$m_*(E):=[a,b]-m^*(E^C)$$

最后，效仿**上积分**和**下积分**思想，定义如果对 $E\in\mathcal{A}$，有内外测度相等

$$m_*(E)=m^*(E)$$

则称 $E$ 是 **Lebesgue** 可测的，其对应的 **Lebesgue** 测度记为

$$m(E):=m_*(E)=m^*(E)$$

**注**：之所以引入了内测度概念，是因为外测度只满足次可加性

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}m^*(E_n)$$

有反例表明可以取得小于号，反例的构造要用到选择公理。这说明可以被外测度量度的集合范围有些大，需要再附加一些条件缩小范围才行。数学就是这样，常常是如果有反例出现，则通常对原问题附加条件，缩小范围，排除反例。

数学分析中还有一个有趣的现象，即某个定理可能成对儿出现，有一个连续版本，很可能存在一个相似的离散版本，反之亦然。比如可微函数的罗比达法则和数列极限的 **Stoltz** 定理，即连续 **VS** 离散。

在后续的 **Fourier** 级数理论中还会遇到另外一对儿：**Fourier** 级数与 **Fourier** 变换，即离散 **VS** 连续。从理论和实用角度看，**Fourier** 变换用途更广。比如在 **PDE** 理论以及信号与系统中。

采用复数形式表述，一个周期为 $T$ 的可积函数的 **Fourier** 级数可以表示成：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$$

其中系数

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\, dt$$

这里 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 为了表述方便，以下记 $l=T/2$, $\alpha_n=n\pi/l$.

为了把 **Fourier** 级数想法推广到非周期函数（定义在整个实轴上）上，**一个自然想法是先考虑** $[-l,l]$ **情形，再令** $l\to\infty$. 形式上，有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(2c_n l\right)e^{in\frac{\pi}{l}t}\frac{\pi}{l}$$

以及

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-i\alpha_n t}dt$$

为考察 $l\to\infty$ 情形，先定义函数

$$c(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

当 $l$ 很大时，$c(\alpha_n)$ 与 $2c_n l$ 相差很小，这样得到近似关系

$$f(t)\approx\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c(\alpha_n)e^{i\alpha_n t}\frac{\pi}{l}$$

注意到

$$\alpha_{n+1}-\alpha_n=\frac{\pi}{l}$$

是一个等距分割，近似关系式右侧是一个 **Riemann** 和，令 $l\to\infty$，得到积分

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)e^{i\omega t}dt$$

其中“**Fourier 系数的推广**”（连续型）$c(\omega)=\hat{f}(\omega)$ 为

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

称作函数 $f(t)$ **的 Fourier 变换**。由 $\hat{f}(\omega)$ 得到 $f(t)$ 的积分称作 **Fourier 逆变换**。

系数 $2\pi$ 的处理有些麻烦，所以导致 **Fourier** 变换定义时有的带系数，有的不带系数，阅读文献时应该注意作者如何定义 **F** 变换，以避免不必要的麻烦。**Fourier** 变换有着物理意义，主要体现在信号与系统中，$f(t)$ 看做时域信号，经过 **Fourier** 变换得到 $\hat{f}(\omega)$ 变成了频域信号。数学上，积分是一种平滑算子，一

个函数与核函数作用，经过积分后得到的新函数的性质往往比原来的函数要好（比如可微性）。实际应用中，根据经验，频域问题通常比时域问题要简单。一个复杂的时域信号 $f(t)$ 看不出规律，但经过 **Fourier** 变换后得到频域信号 $\hat{f}(\omega)$ 很可能就有规律了。

关于 **Fourier** 变换在数学研究中的作用可参考数理方程教材或者 **PDE** 方面的教材。笔者的一点经验是：**Fourier** 变换和 **Laplace** 变换把微分运算变成代数运算，而代数运算相对简单。更深的应用恐怕涉及广义函数论和椭圆算子等深入内容了。

写到这里，从篇幅看可以收笔了。但笔者觉得还是应该补充一个类比的经典例子，这个例子更典型，同时也纪念高斯和阿贝尔两位大师。下面的文章本质是两位大师的合力之作，主要处理一类称作**雅可比椭圆正弦函数** $\mathrm{sn}\,u$．这是一类特殊的椭圆函数，本文采用记号 $\varphi(u)$ 来表示 $\mathrm{sn}\,u$ 。

第一类椭圆积分为

$$u=\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

其中，参数 $k$ 满足 $0<k^2<1$．由此可以定义出一个反函数 $z=\varphi(u)$，这是椭圆积分的反演（逆函数），一般称 $\varphi(u)$ 为椭圆函数。

利用积分反演定义新的函数并不是什么少见的事情，众所周知

$$u=\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin z$$

定义了正弦函数 $z=\sin u$．这其实是椭圆积分中 $k=0$ 对应的退化情形（极端情况），下面借助正弦函数加法公式作为类比来研究椭圆函数加法公式。

我们知道，正弦函数 $\sin u$ 有加法公式

$$\sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v$$

写成**更对称的导数形式**是

$$\sin(u+v)=\sin u\sin' v+\sin' u\sin v$$

注意到 $\varphi(u)$ 的退化情形（$k=0$ 时）即为 $\sin u$，我们可以猜想 $\varphi(u+v)$ 中有因子

$$\varphi(u)\varphi'(v)+\varphi'(u)\varphi(v)$$

不妨设

$$\varphi(u+v)=\frac{\varphi(u)\varphi'(v)+\varphi'(u)\varphi(v)}{\psi(u,v,k^2)}$$

写成商的形式纯粹是为了运算上的方便，后面我们会看出原因来。我们接下来的重点是**猜测待定函数** $\psi(u,v,k^2)$ **的形式**。

由正弦函数加法公式可知

$$\psi(u,v,0)=1$$

椭圆积分两边对变量 $z$ 求导，得到

$$\frac{du}{dz}=\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

所以有导数关系

$$\varphi'(u)=\frac{dz}{du}=\sqrt{(1-\varphi^2(u))(1-k^2\varphi^2(u))}$$

为方便起见，引进辅助函数（**类似于** $\cos u$ ）

$$f(u)=\sqrt{1-\varphi^2(u)}\,,\ g(u)=\sqrt{1-k^2\varphi^2(u)}$$

于是 $\varphi'(u)=f(u)g(u)$，以及 $\varphi(0)=0$ , $f(0)=g(0)=1$ , $\varphi'(0)=1$

注意到 $\varphi(u+v)$ 中 $u$ 和 $v$ 是**轮换对称**的且满足

$$\psi(0,v,k^2)=\psi(u,0,k^2)=1$$

为了得到 $\psi(u,v,k^2)$ 的进一步信息，我们考虑另一种退化情形 $k^2=1$

此时，原积分化为

$$u=\int_0^z\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$$

即

$$z=\varphi(u)=\frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1}$$

又因为 $e^{2u}=\dfrac{1+\varphi(u)}{1-\varphi(u)}$，由此不难得到下面的**加法公式**（对应 $k^2=1$ 情况）

$$\varphi(u+v)=\frac{\varphi(u)+\varphi(v)}{1+\varphi(u)\varphi(v)}$$

因为此时 $\varphi'(u)=1-\varphi^2(u)$，直接计算

$$\varphi(u)\varphi'(v)+\varphi'(u)\varphi(v)=\varphi(u)(1-\varphi^2(v))+(1-\varphi^2(u))\varphi(v)$$
$$=(\varphi(u)+\varphi(v))(1-\varphi(u)\varphi(v))$$

由此可知

$$\psi(u,v,1)=(1+\varphi(u)\varphi(v))(1-\varphi(u)\varphi(v))=1-\varphi^2(u)\varphi^2(v)$$

再注意到 $\psi(0,v,k^2)=\psi(u,0,k^2)=1$ 及 $\varphi(0)=0$，**猜想**

$$\psi(u,v,k^2)=1-k^2\varphi^2(u)\varphi^2(v)$$

**是一种比较自然和整齐的思路。**

于是我们猜想：

$$\varphi(u+v)\approx\frac{\varphi(u)\varphi'(v)+\varphi'(u)\varphi(v)}{1-k^2\varphi^2(u)\varphi^2(v)}=:D(u,v)$$

**一般来说，知道了猜想的结论（概率意义上），总是可以验证的，下面直接证明：** $\varphi(u+v)=D(u,v)$. 这个精彩的证明出自数学大师阿贝尔之手！

利用偏导数公式，经过相对繁琐的计算，可知

$$[1-k^2\varphi^2(u)\varphi^2(v)]^2\frac{\partial D}{\partial u}$$
$$=f(u)g(u)f(v)g(v)[1+k^2\varphi^2(u)\varphi^2(v)]-\varphi(u)\varphi(v)[g^2(u)g^2(v)+k^2f^2(u)f^2(v)]$$

由此不难发现**轮换对称性**，剩下只需求解偏微分方程

$$\frac{\partial D}{\partial u}=\frac{\partial D}{\partial v}$$

考虑变换 $u=(s+t)/2, v=(s-t)/2$，于是

$$\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial D}{\partial u}-\frac{\partial D}{\partial v}\right)=0$$

故存在函数 $\phi$，使得

$$D=\phi(s)=\phi(u+v)$$

又 $v=0$ 时，有 $\phi(u)=D(u,0)=\varphi(u)$，这样我们证明了

$$\varphi(u+v)=\frac{\varphi(u)\varphi'(v)+\varphi'(u)\varphi(v)}{1-k^2\varphi^2(u)\varphi^2(v)}$$

这个例子巧妙地将**“类比、猜想与证明”**融合到一起，比较能代表笔者对数学研究的观点。

# 学数学要有逆向思维

***SCIbird***

**说明**：鉴于笔者时间和精力有限，文章小错误难免。因此笔者建议读者最好将文章中的结论动手推导一遍，相信必有收获。光看不练，等于白看。

逆向思维或逆向思考似乎与常规逻辑不太合群，有点不走寻常路的感觉。但历史一再证明了逆向思维的重要性，往往能起到奇兵的作用。数学中的逆向思维首推**反证法**。相信大家对反证法已经非常熟悉了，就像老朋友一样。不少定理直接证明比较困难，但借助反证法就容易多了，比如证明单位正方形对角线长度是无理数。

逆向思维的例子很多，有些太寻常了，以至于没有留意。比如**反函数**的概念，这是拓展函数研究范围的一种方法。按笔者的想法，多项式和有理函数是熟悉的，因为可以与实数加减乘除运算作为类比。但是，对数函数、指数函数与三角函数就不那么熟悉了，比如$\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$应该如何理解？

按照数学史，对数函数先于指数函数出现，通常定义为

$$\ln x=\int_1^x \frac{dt}{t}$$

被积函数是有理函数，我们很熟悉。通过变量代换，可以得到积分等式

$$\int_1^{xy} \frac{dt}{t}=\int_1^x \frac{dt}{t}+\int_1^y \frac{dt}{t}$$

这就是对数的乘法公式：$\ln xy=\ln x+\ln y$.

对数函数$y=\ln x$的反函数为指数函数$x=e^y$，习惯上记为$y=e^x$. 指数函数有加法公式$e^{x+y}=e^x\cdot e^y$. 这里的底数$e$这样定义，它使得

$$1=\int_1^e \frac{dt}{t}$$

对数函数$y=\ln x$导数可以直接求出来，即$y'=1/x$（利用变上限积分求导法则）。指数函数$y=e^x$的导数可以间接求出来，即利用它的反函数导数，然后倒过来即可，由此可知$(e^x)'=e^x$. 这比直接利用导数定义要便捷一些。

借助于欧拉公式$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，我们实际上可以由指数函数来研究三角函数。当然，也可以由其它方法来研究三角函数。

对于数学家来讲，研究一个函数的反函数是一个很自然的事情，**研究一种**

**运算的逆运算也是很自然的**。数学分析中的典型代表要数不定积分$\int$了。最初不定积分运算$\int$看做是导数的逆运算，即按

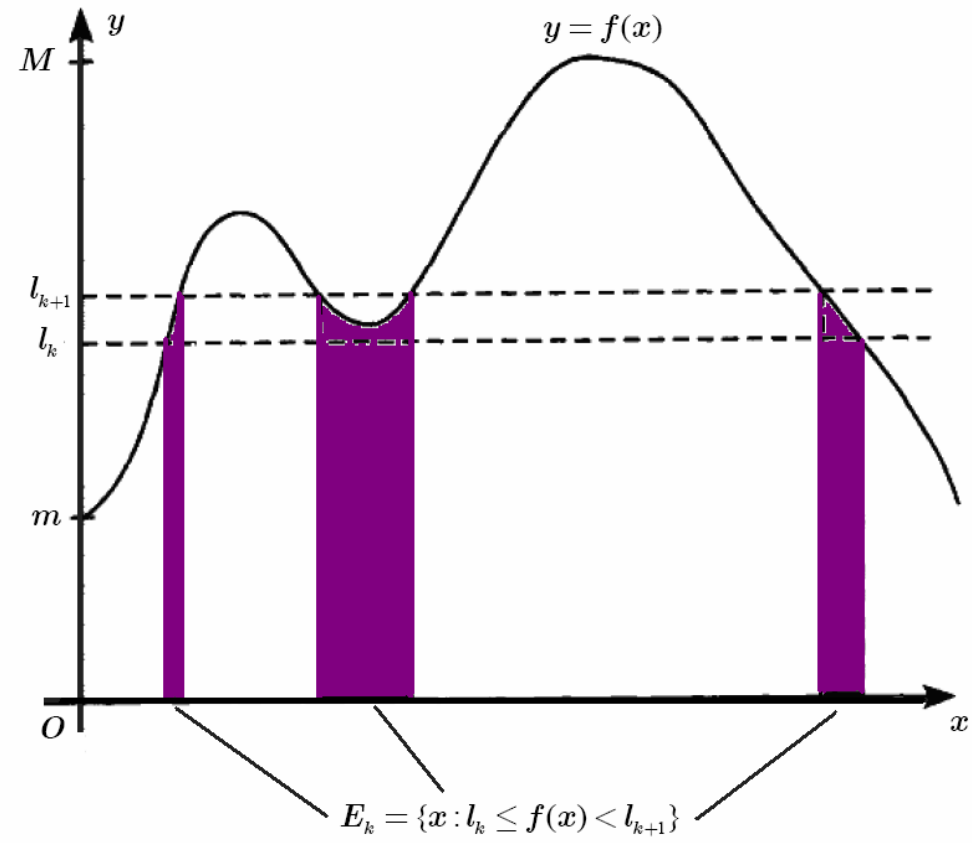
$$\int := \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}$$

来理解。所以有的书上称**不定积分**为“**反导数**”。这里完全可以用其它符号来表示不定积分$\int$. 只是后来人们发现了牛顿-莱布尼茨公式，发现连续函数的变上限定积分就是一个原函数，所以采用了相似的符号。不过必须强调的是，不定积分$\int$表示一族函数而不是一个，即

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

不要漏掉任意常数$C$.

以上例子都是很自然的。类似的例子有很多，一个非平凡的例子是 **Lebesgue** 积分，其原始想法是分$y$轴！可用下图来说明。




**Lebesgue 积分示意图**

回忆一下 **Riemann** 积分，其想法是分$x$轴，考虑下面和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

当 $\max\{x_i - x_{i-1}\} \to 0$ 时的极限。

但是当函数 $f(x)$ 剧烈震荡时，上述极限可能不存在。即可以控制 $\{x_i\}$，但无法控制 $f(\xi_i)$. 勒贝格的想法是**分 $y$ 轴**（即控制 $f(\xi_i)$），大致想法如下：

设 $m \le f(x) \le M$，然后分割函数的值域 $[m, M]$，得到分割点

$$m = l_0 < l_1 < \cdots < l_n = M$$

再记集合

$$E_k = \{x \in [a, b]:\ l_k \le f(x) < l_{k+1}\}$$

上述点集合的 **Lebesgue** 测度记为 $m(E_k)$. 考察和式

$$\sum l_k m(E_k)$$

如果 $\max\{l_{k+1} - l_k\} \to 0$ 时，上述和式的极限存在，则记为

$$\int_E f(x)\, dx$$

称作 **Lebesgue** 积分。这种积分对于 **Riemann** 积分是兼容的。**之所以借助 Lebesgue 测度，是因为对于复杂函数来讲，点集 $E_k$ 未必能表示成有限个区间的并集。**

笔者当初自学 **Lebesgue** 积分时，内心有一个困惑。因为一维积分可以看做是求图形面积，即求

$$I = \iint_D dxdy$$

**站在求面积（测度）角度看，分 $x$ 轴与分 $y$ 轴地位是对等的，为什么后者对应的 Lebesgue 积分更强大呢。**这个问题困扰了自己很久，后来发现原因：

通常的积分是针对函数 $f(x)$ 的，而函数的定义要求对每一个 $x$，有**惟一**的数值 $f(x)$ 与之对应。所以分 $x$ 轴的时候，$f(x)$ 的表现不那么糟糕。但是，如果分 $y$ 轴，那么根据函数定义，同一个数值 $y$，可能有一堆 $x$ 与之对应，此时已经不存在函数关系 $x = g(y)$ 了。这一解释说明，**站在函数积分的角度看，分 $x$ 轴与分 $y$ 轴并不对等**。细想想确实如此，对于形态好的函数，分 $x$ 轴与分 $y$ 轴效果一样，对于一些比较 BT 的函数，需要分 $y$ 轴了（同时要借助 L 测度理论）。

需要强调的是：勒贝格本人的看法是，**Lebesgue** 积分的真正价值不是使得一些 **R** 不可积函数变得可积了，**L** 积分的真正价值是：**大大放宽了积分与极限之间的运算条件，如控制收敛定理。**

搞数学研究，很多时候的关键不是数学工具的高深或证明难度大，而是有没有想法。法国数学家勒让德研究了椭圆积分几十年，也写了几大本专著。比如下面的**第一类椭圆积分**

$$u=\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

该积分在求椭圆弧长时出现，故而得名。

**勒让德在研究椭圆积分时缺少了逆向思维，没有想到研究其反函数** $z=\mathrm{sn}\,u$（椭圆函数），从而与椭圆函数奠基人的历史机会擦肩而过。**而高斯和阿贝尔想到了研究椭圆积分的反函数，成为了椭圆函数领域的奠基人。**

其实利用积分反演（反函数）研究函数并不是什么少见的事情，众所周知

$$u=\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin z$$

定义了**正弦函数** $z=\sin u$. 这其实是椭圆积分中 $k=0$ 对应的退化情形。技术上，研究椭圆函数比研究椭圆积分简单，而且有很多新的发现，比如椭圆函数的双周期性等。

听一位数学老师说过，每次有人来做报告他都尽可能去听，但 **10** 场报告也就能听明白 **3** 场，为什么还去听呢？这位老师的解释是，听的是 **idea**！也许报告人不经意间某句话，某个 **idea**，就能给予你意想不到的启示。

# 数学分析三大基本思想之逼近

***SCIbird***

**说明**：鉴于笔者时间和精力有限，文章小错误难免。因此笔者建议读者最好将文章中的结论动手推导一遍，相信必有收获。光看不练，等于白看。

从本章开始，计划用三篇文章来介绍数学分析中的三大基本思想，即**逼近**、**变换**和**分解**。

对数学分析普遍的看法是，上手容易，难以精通，易学难精。除了数学分析科目本身博大精深外（想想数分后续科目复变、实变、**ODE** 和 **PDE**），造成这种现象的原因之一是数学分析中的技巧特别多，初步统计包括**逼近**（放缩和夹逼）、**变换**（等价无穷小和不定积分换元）、**分解**（级数和累次积分）、反演、递推、**RMI** 原理、对称、引入参变量（收敛因子）、极端法、归纳法、构造法和计算两次法等等。这些方法技巧，本身也是宝贵的数学思想，它们分散在数学分析的若干定理和经典习题当中，单独拿出来都能写一篇文章。这方面读者可以参考谢惠民的《数学分析习题课讲义》一书，写得很全面。

但凡事大都有主要矛盾，学数学分析也应该抓主要思想。根据笔者这些年对数学分析的体会，感觉有三大基本思想是数学分析的核心，**逼近**、**变换**和**分解**。围绕微分、积分和级数这三大主题，展开上述三大基本思想，构成了数学分析的主干。不论是初学者，还是重温者，抓住上面的主干，就有了方向。本章先介绍数学分析第一大基本思想：**逼近**。

数学分析处理的对象涉及无穷，因而必须考虑极限。而如何严格描述极限过程呢？为此，引入了$\varepsilon-\delta$语言（相当于公理），所讨论的极限，即$\varepsilon-\delta$意义下的极限。本文所讨论的逼近，也是$\varepsilon-\delta$意义下的逼近。出于对几何直观的偏爱，笔者更喜欢用$x_n \to x_0$（箭头）表示逼近过程，而不是用$|x_n - x_0| < \varepsilon$.

谈及分析中的逼近，免不了涉及不等式，这也是分析难学的原因之一。毕竟，不等式比等式难处理多了，而且经常要分段估计（如三段法）。逼近是一种重要的思想，用简单的近似复杂的，用熟悉的近似陌生的，这种思想绝非数学独有。

回想极限的定义、连续的定义、定积分的定义，都体现了数学中的逼近思想。当然，极限和连续可以用拓扑的方法定义，但失去了直观性。学数学分析还是尽量采用直观的方法为好，至少在水平达到一定程度之前如此。

逼近的常见技巧是放缩和夹逼，方法的框架很简单，但具体应用时需要与具体问题相结合。本文重点介绍逼近的思想在数学分析中的体现，下面用两个例子来说明。

第一个例子：**闭区间上的连续函数可由多项式一致逼近。**

这是魏尔斯特拉斯的多项式逼近连续函数定理，学过数分的人都知道。多数教材对这个定理的证明采用伯恩斯坦多项式的构造方法。这里我们不去探讨证明过程，重点说明一个有趣的数学证明思路，想法来自概率论。考虑独立重复的伯努利实验，它有两个结果 $A, B$，出现结果 $A$ 的概率为 $x$，出现结果 $B$ 的概率为 $1-x$. 则 $n$ 次独立重复实验中，恰好出现 $k$ 次的结果 $A$ 的概率为

$$P_n(k)=C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

显然，$\Sigma P_n(i)=1$. 这种概率分布也叫二项分布。固定 $n$ 和 $x$ 不动，将 $P_n(k)$ 视作变量 $k$ 的函数。这个函数在 $nx$（不一定是整数）附近有一尖峰，在两侧迅速递减。于是直观上可以设想，对这样的 $nx\approx k$（以下默认），$P_n(k)$ 比较接近于 **1**（在和式 $\Sigma P_n(i)=1$ 中权重较大）。因此，下面的**加权逼近**想法就自然了：

$$\sum_{i=1}^{n} P_n(i) f(\frac{i}{n}) \longrightarrow f(\frac{k}{n}) \approx f(x)$$

记多项式 $B_n(f, x)=\sum_{i=0}^{n} f(\frac{i}{n}) C_n^i x^i(1-x)^{n-i}$，则利用初等不等式放缩技巧可以证明：当 $n\to\infty$ 时，多项式序列 $B_n(f, x)$ 一致逼近连续函数 $f(x)$.

**注**：证明细节可参考张筑生老师的《数学分析新讲》第三册。

也有教材采用高级工具来证明，如核函数方法。细节见卓里奇的《数学分析》第二册，或者《新讲》第三册含参数积分章节。笔者在网上看到一位台湾数学老师介绍多项式逼近连续函数的好文章，重点就是介绍“核函数”法来构造逼近多项式（推荐读读）：

Weierstrass 逼近定理

本质上，这种核函数法利用了广义函数中的狄拉克函数序列性质，可参考

广义函数或数理方程的相关书籍。这方面一个著名的结论是

$$f(x)=\int_{\mathrm{R}} f(t)\delta(x-t)\,dt$$

这方面除了核函数外，还涉及到卷积工具。所构造的“核函数序列”的极限具有狄拉克函数$\delta$性质。巧妙之处在将卷积（积分）分成两段$|x|\geq\varepsilon$和$|x|<\varepsilon$进行分段估计，这从证明过程中可以看出。

**核函数**：设$\Delta_n(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上以$n$为参数的函数，并且满足：

1. **非负性**，即$\Delta_n(x)\geq 0$；
2. 广义可积性（**正则性**），即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta_n(x)\,dx=1$$

3. **狄拉克序列性质**，即$\forall\delta>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|<\delta}\Delta_n(x)\,dx=1$$

**注**：这里的$\Delta_n(x)$是正核，实际应用中也会遇到非正核子，如 **Fourier** 级数中的狄利克雷核。另外，参数也不一定是$n$，也可以是连续变量。

这些核函数图形的有一个尖点，两旁迅速下降，极限情况就是**狄拉克$\delta-$函数**。

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}\quad 以及\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx=1$$

如果这个核函数比较光滑，且能展开成一致收敛的幂级数，那么截取前面有限部分就构造出了逼近多项式，这也是魏尔斯特拉斯本人原来证明的思路。魏尔斯特拉斯本人最初的证明，使用的核函数是“**热核**”（正态核）

$$\Delta_h(x)=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{h^2}}$$

其中参数$h$是连续变量。上面这个函数也常见于**正态分布**。

然后，魏尔斯特拉斯证明了当$h\to 0+$时，卷积

$$f*\Delta_h(x)=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-\left(\frac{u-x}{h}\right)^2}\,du$$

一致收敛于$f(x)$.

最后，魏尔斯特拉斯将问题限制在闭区间$[a,b]$上，并将热核函数$\Delta_h(x)$进行**幂级数展开**，取前边若干项截断，就得到了一个多项式$P(x)$，用它代替$\Delta_h(x)$，这样就证明了多项式逼近连续函数定理。

通常教材上选取的核函数是 **Landau** 核，这个核函数本身就是多项式，因此相比原证明减少了一步，但本质没有改变。**Landau** 的证明用到了核函数：

$$\Delta_n(x)=c_n(1-x^2)^n \quad ,-1\le x\le 1$$

然后构造多项式序列

$$P_n(x)=\int_0^1 f(u)\,\Delta_n(u-x)\,dx$$

以上核函数方法均出现了卷积，卷积的好处是一个函数**“光滑化”**。

**根据概率论知识，发现二项分布的极限分布（中心极限定理）是正态分布**（也就是热核），不知道伯恩斯坦本人是否受此启发，想到了巧妙的伯恩斯坦多项式 $B_n(f\,,x)$. 细心观察不难发现，伯恩斯坦多项式证明法相当于离散核。

不过笔者感到最直观方法，还是勒贝格的**“折线逼近法”**，大体思路是：闭区间上的连续函数可以用折线逼近（比较直观）。而折线函数可以用函数 $x$ 和 $|x|$ 进行线性组合而得到。考虑到 $|x|=\sqrt{x^2}$ ，经过一些代换，利用二项级数展开，得到了一致收敛的幂级数，这说明 $|x|$ 可以用多项式一致逼近。

考虑二项级数展开

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

当 $\alpha>0$ 时，上述级数在闭区间 $[-1\,,1]$ 上一致收敛于函数 $(1+x)^\alpha$.

于是在闭区间 $[0\,,2]$ 上 $\sqrt{x}$ 可以展开成**一致收敛**的幂级数

$$\sqrt{x}=[1+(x-1)]^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(x-1)^n$$

这样我们证明了：

**引理 1：连续函数 $\varphi(x)=\sqrt{x}$ 在闭区间 $[0\,,1]$ 上可以用多项式一致逼近。**

再定义**函数**

$$\lambda(x)=\frac{|x|+x}{2}=\begin{cases}0\,, & x\le 0\\ x\,, & x>0\end{cases}$$

不难证明，连续函数 $\lambda(x)$ 可在任意任意闭区间 $[-c\,,c]$ 上用多项式一致逼近。

**引理 2：定义在闭区间 $[a\,,b]$ 上的任意折线函数 $\Lambda(x)$ 都可以表示成**

$$\Lambda(x)=c+c_0\lambda(x-x_0)+\cdots+c_m\lambda(x-x_0)$$

**因而定义在闭区间上的任意折线函数都可以用多项式一致逼近。**

有了上面的多项式逼近折线函数定理后，可利用函数的一致连续性证明：

**闭区间$[a,b]$上的连续函数可由折线函数一致逼近。**

上述思路可概括为：**多项式$\to$折线函数$\to$连续函数**，证明细节可参考《新讲》第三册。

闭区间上多项式逼近连续函数定理不能推广到R上。可进行逆向思考，如果可以，则多项式序列$p_n(x)$是柯西列。但$m\neq n$时，多项式$p_n(x)-p_m(x)$是非常数多项式，不可能是柯西列。

多项式逼近连续函数定理，也可以推广到三角多项式（如 **Fourier** 级数中的费耶和），甚至更一般的抽象空间，即斯通-魏尔斯特拉斯定理（见《新讲》第三册）。另一个有意思的推广是所谓 **Muntz-Szasz** 定理：

将多项式函数基底$1,x,x^2,x^3,\cdots$替换成基底$1,x^{\lambda_1},x^{\lambda_2},x^{\lambda_3},\cdots$，之后，魏尔斯特拉斯的逼近定理仍然成立。即

$$\overline{span}\{1,x^{\lambda_1},x^{\lambda_2},x^{\lambda_3},\cdots\}=C[a,b]$$

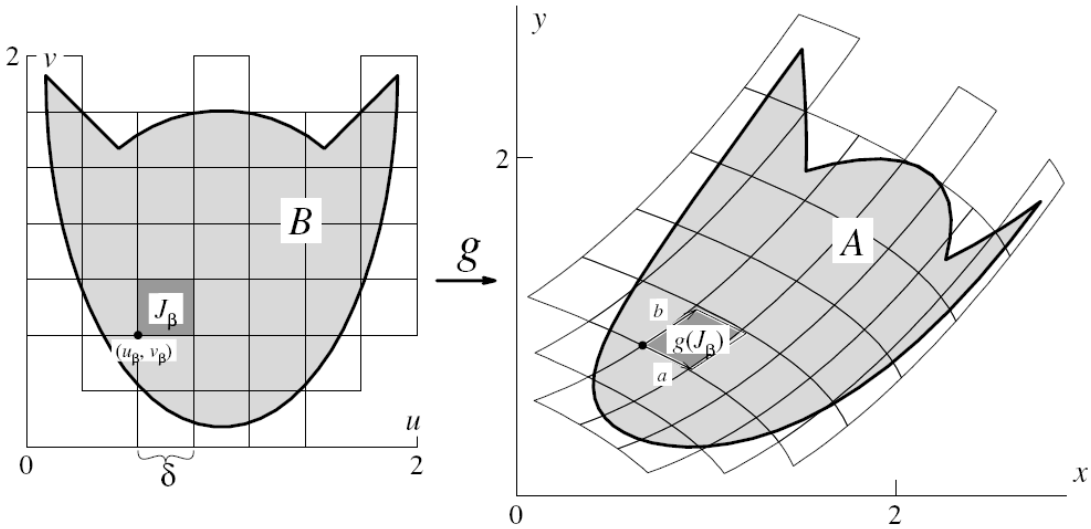
这里$0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots$，且满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}=+\infty$$

**注：**此时基底$1,x^{\lambda_1},x^{\lambda_2},x^{\lambda_3},\cdots$的线性组合不一定是多项式。**Muntz-Szasz** 定理的证明需要复变函数和泛函分析知识，读者可参考 **Rudin** 的《实分析与复分析》或者 **P.Lax** 的《泛函分析》。

第二个例子是：**重积分变量换元公式。**

由于积分的 **Riemann** 和定义可以看做是**“体积线性组合”**（然后再求极限），所以解决在变换$\varphi$下的体积变化关系是解决问题的关键。考察一个小立方体$C$在变换$\varphi$下$\varphi(C)$的体积就是自然思路了。遗憾的是由于$\varphi(C)$一般是非线性变换，所以$\varphi(C)$多半要发生扭曲变形。直观上，如果立方体$C$充分小，变换$\varphi$又比较光滑，那么$\varphi(C)$扭曲程度就不那么厉害。




借用上图说明一下（这里 $g=\varphi$）

由微分思想可知，一个映射 $\varphi$ 的作用在一点 $x_0$ 邻域范围内可以**近似**看做是一个局部线性映射 $L(x)=\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0)$.

稍微精确一些描述，取定小立方体 $C$ 的中心点 $x_0$，那么当 $C$ 充分小时，线性变换 $L(x)=\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0)$ 与变换 $\varphi(x)$ 相差高阶无穷小量。也就说处理问题时，$\varphi(x)$ **局部上可由线性变换近似代替，微分的精华思想也在于此。**

根据线性代数中的一个结论，对可逆线性变换 $A$，有体积关系

$$\mu(A(C))=|\det A|\,\mu(C)$$

这里用符号 $\mu$ 表示若尔当体积。

令线性变换 $A=L$，则 $\det A=\det\varphi'(x_0)$ 或写成 $\det A=\det D\varphi(x_0)$.

由此得到**体积近似关系：** $\mu(\varphi(C))\approx|\det\varphi'(x_0)|\,\mu(C)$. 进而

$$f(x)\mu(\varphi(C))\approx f(\varphi(t))\,|\det\varphi'(t_0)|\,\mu(C)$$

其中 $x=\varphi(t)$. 根据积分的 **Riemann** 和定义，不难猜出重积分变量代换公式

$$\int_{\varphi(E)} f(x)\,dx=\int_E f(\varphi(t))\,|\det D\varphi(t)|\,dt$$

此处 $x$, $t$ 都是向量，$D\varphi(t)=\varphi'(t)$ 表示**雅可比矩阵**（导数的推广）。上述想法表述为下面的**重积分变量换元公式：**

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^m$ 是一个开集，

$$\varphi:\Omega\to\mathbf{R}^m$$

是一个连续可微映射，$E\subset\Omega$ 是一个闭若尔当可测集。如果

（1） 雅可比行列式 $\det D\varphi(t)\neq 0$ , $\forall t\in\operatorname{int}E$；

（2） $\varphi$ 在 $\operatorname{int} E$ 中是单射。

那么 $\varphi(E)$ 也是一个闭若尔当可测集，并且对于任何在 $\varphi(E)$ 上连续的函数 $f(x)$ 都有

$$\int_{\varphi(E)} f(x)\,dx = \int_E f(\varphi(t))\,|\det D\varphi(t)|\,dt\,.$$

这个定理的证明有些复杂，细节见《数学分析新讲》第二册，基本想法是**“采用把局部微分同胚分解成简单微分同胚的复合，**然后再转化为累次积分来证明”。

《新讲》中的证明方法，将在“变换”一章中细说。这里，说说该定理的 **Riemann** 和证明法，引自下面的《**美国数学月刊**》文章。这里将该文章的核心部分翻译过来，大家可以感受一下逼近法的巧妙证明。

对于连续函数 $f(x)$ 可分离其正部和负部以分别讨论积分，而不影响最终的结果。所以，**不妨设** $f(x)\geq 0$ **恒成立**。

**THE FORMULA FOR CHANGE IN VARIABLES IN A MULTIPLE INTEGRAL**

J. SCHWARTZ, Yale University

A well-known theorem of elementary analysis states:

THEOREM. *Let $D_1$ and $D_2$ be open sets in Euclidean n-space $E^n$, and let $h$: $D_1 \to D_2$ be a 1-1 mapping of $D_1$ onto $D_2$ such that $h$ and its inverse $h^{-1}$ are continuous and have continuous derivatives. Let*

$$J(x) = \left|\det\left(\frac{\partial h^i(x)}{\partial x^j}\right)\right|$$

*be the absolute value of the Jacobian determinant of the transformation $h$. Then a function $f(x)$ is integrable over the domain $D$ if and only if the function $f(h(x))J(x)$ is integrable over $D_1$, and we have*

$$\int_{D_2} f(x)dx = \int_{D_1} f[h(x)]J(x)dx.^* \tag{1}$$

限于篇幅，本文只给出上述文章的最核心内容。首先，设 $D_1$ , $D_2$ 是欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，$h: D_1 \to D_2 = h(D_1)$ 是一个双射，且映射 $h$ 与逆映射 $h^{-1}$ 是连续可微的。即 $h: D_1 \to D_2$ 是**微分同胚**。

（**重积分变量代换定理**）记符号

$$J(x)=\left|\det\left(\frac{\partial h^i(x)}{\partial x_j}\right)\right|$$

表示映射 $h$ 对应雅可比矩阵**“行列式的绝对值”**。则函数 $f(x)$ 在 $D_2$ 上可积，当且仅当 $f(h(u))J(u)$ 在 $D_1$ 上可积，以及

$$\int_{D_2=h(D_1)} f(x)\,dx=\int_{D_1} f[h(u)]J(u)\,du$$

**证明：**对 $x\in\mathbf{R}^n$，引入 **max** 范数 $|x|=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$，其中 $x_i$ 是向量 $x$ 的第 $i$ 个坐标分量。于是一个中心为点 $p$，棱长为 $2s$ 的立方体可以表示成 $|x-p|\le s$.

如果 $A$ 是一个线性变换，对应矩阵为 $\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，则有

$$A(x)=A[x_1,\cdots,x_n]=\left[\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j\ ,\ \cdots\ ,\sum_{j=1}^n a_{nj}x_j\right]$$

再定义矩阵范数

$$|A|=\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}\right|$$

由此得到 $|A(x)|\le|A|\ |x|$.

对映射 $h(x)=[h_1(x),\cdots,h_n(x)]$，记其雅可比**矩阵** $j(x)=j_{ik}(x)$ 为

$$j_{ik}(x)=\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_k}$$

集合 $S\subset\mathbf{R}^n$ 对应的体积（测度）记为 $\mu(S)$. 则一个中心为点 $p$，棱长为 $2s$ 的立方体 $C\subset D_1$ 可以表示成 $|x-p|\le s$，其对应体积 $\mu(C)=(2s)^n$，由此可得到下面的拉格朗日中值定理

$$h_i(x)-h_i(p)=\sum_{k=1}^n j_{ik}[p+\theta_i(x)(x-p)](x_k-p_k)$$

其中 $0\le\theta_i(x)\le1$. 所以，得到

$$|h(x)-h(p)|\le s\max_{y\in C}|j(y)|$$

换句话说，像集 $h(C)$ 包含在立方体

$$|z-h(p)|\le s\max_{y\in C}|j(y)|$$

之中。由此得到体积估计

$$\mu(h(C)) \le \left\{\max_{y\in C} |j(y)|\right\}^n \mu(C)$$

将上述结论应用于映射 $A^{-1}h$，这里 $A$ 是可逆线性映射。同时利用线性代数中的一个重要结论：$\mu(A^{-1}(S)) = |\det A^{-1}|\,\mu(S)$，其中 $S$ 为闭集。令 $S = h(C)$，因为 $C$ 是有界闭集，映射 $h$ 是连续可微的，所以

$$\mu(A^{-1}h(C)) = |\det A^{-1}|\,\mu(h(C)) \le \left\{\max_{y\in C} |A^{-1}j(y)|\right\}^n \mu(C)$$

移项得到

$$\mu(h(C)) \le |\det A| \left\{\max_{y\in C} |A^{-1}j(y)|\right\}^n \mu(C)$$

这一不等式的妙用将在下面的 **Riemann** 和中得到体现。将立方体 $C$ 分割成有限个内部互不相交的小立方体 $C_1, C_2, \cdots, C_M$，对应中心分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_M$．记 $\delta > 0$ 为这样的正数，它比上述 $M$ 个小立方体的棱长都要小。

对立方体 $C_i$，取 $A = j(x_i)$，再应用上面的不等式以及体积的可加性，得到

$$\mu(h(C)) \le \sum_{i=1}^{M} |\det j(x_i)| \left\{\max_{y\in C_i} |j(x_i)^{-1} j(y)|\right\}^n \mu(C_i)$$

因为矩阵函数 $j(x)$ 是连续函数，所以当 $z \to y$ 时，

$$j^{-1}(z)j(y) \to I \text{（单位矩阵）}$$

由此得到不等式估计

$$\left\{\max_{y\in C_i} |j(x_i)^{-1} j(y)|\right\}^n \le 1 + \eta(\delta)$$

其中正数 $\eta(\delta)$ 满足：$\delta \to 0$ 时，$\eta(\delta) \to 0$．

进而得到**核心不等式**估计

$$\mu(h(C)) \le [1+\eta(\delta)] \sum_{i=1}^{M} |\det j(x_i)|\,\mu(C_i)$$

注意到上面不等式右边实际是一个体积的 **Riemann** 和，令 $\delta \to 0$ 得到

$$\mu(h(C)) \le \int_C J(x)\,dx$$

对于连续函数 $f(x)$ 可分离其正部和负部分别讨论积分，而不影响最终的结果。所以这里**不妨设** $f(x) \ge 0$ **恒成立**。根据积分的 **Riemann** 和定义，得到

$$\int_{D_2 = h(D_1)} f(x)\,dx \le \int_{D_1} f[h(u)]J(u)\,du$$

**注：**为避免符号混淆，这里对 $D_1$ 上的积分，采用积分变量 $u$ 来表示。

到此为止，我们得到的是一个不等式，下面巧妙地利用逆变换 $h^{-1}$ 得到反向不等式（对称性体现），进而得到等式。

将变换 $u = h^{-1}(x)$ 代入上面积分不等式，得到

$$\int_{D_2} f(x)\,dx \le \int_{D_1} f[h(u)]J(u)\,du \le \int_{D_2} f[h\circ h^{-1}(x)]J(h^{-1}(x))J'(x)\,dx = \int_{D_2} f(x)\,dx$$

其中，$J'(x)$ 是映射 $h^{-1}: D_2 \to D_1$ 对应的雅可比行列式的绝对值。且满足

$$J(h^{-1}(x))J'(x) = 1$$

所以，我们证明了重积分变量代换定理。

# 数学分析三大基本思想之变换

*SCIbird*

**说明**：鉴于笔者时间和精力有限，文章小错误难免。因此笔者建议读者最好将文章中的结论动手推导一遍，相信必有收获。光看不练，等于白看。

本章介绍数学分析中的三大基本思想之**变换**。广义的变换应该作为一种思想来理解，即对某个数学对象进行操作，转化为另一个对象，要求后者相对容易处理。

我们在中学已经接触到一些简单的变换，如三角变换和万能公式。进入大学学习数学分析或微积分，接触到求极限方法的等价无穷小代换也是变换的一种。像微分理论中的罗比达法则，积分理论中的第一、二类换元法，级数理论中的算术平均求和法（即$C-1$求和法，例如 **Fourier** 理论中的费耶和），常微分方程中的分离变量法、常数变易法和积分因子法等等，都是变换思想的具体表现。

从实用角度看，最常见的线性变换，这方面内容在线性代数课程中有详细论述。后来人们进一步抽象出线性算子，并把它推广到无穷维线性空间，这些内容可以在泛函分析课程中学到。需要指出，非线性变换也是存在的，而且更普遍，处理起来也更困难。数学分析作为基础课程，主要以处理线性变换为主（包括逆变换），微分学的精髓就是函数增量的线性主部，站在算子角度，微分是线性变换的一种。另外，不少非线性变换的处理方法是从线性变换中衍生出来的，这就更体现出线性变换的重要性。

还是用几个具体的“变换例子”来说明吧。首先说说不定积分，这方面技巧非常多，很多教材都单独列出一节讲一些经典的不定积分技巧，比如有理函数如何积分，某些根式如何积分等等。其中使用得最多的是第一类换元积分法和第二类换元积分法。前者，主要是微分公式$d(uv)=vdu+udv$经过移项变换，得到

$$udv=d(uv)-vdu$$

再求**逆变换**（积分）的结果

$$\int udv=uv-\int vdu$$

变换的指导精神是不定积分$\int vdu$比较容易求出。

关于第二类不定积分换元法，通常涉及反函数，很多书中给的条件并不一致。《**数学分析习题课讲义**》中收录了下面的定理：

**设 $f(x)$ 有原函数，函数 $x=x(t)$ 可微且有函数 $t=t(x)$ 满足 $x(t(x))\equiv x$，若**

$$\int f(x(t))x'(t)\,dt=F(t)+C$$

**则有**

$$\int f(x)\,dx=F(t(x))+C$$

**证明：**已知 $f(x)$ 有原函数，记为 $U(x)$，则有 $U'(x)=f(x)$．又已知

$$F'(t)=f(x(t))x'(t)$$

由复合函数求导法则得到

$$\frac{dU(x(t))}{dt}=U'(x(t))x'(t)=f(x(t))x'(t)=F'(t)$$

因此 $U(x(t))$ 与 $F(t)$ 只相差一个常值函数

$$U(x(t))=F(t)+C$$

将 $t=t(x)$ 代入，且利用恒等式 $x(t(x))\equiv x$，于是就有

$$U(x(t(x)))=U(x)=F(t(x))+C$$

对上面两边求导可知

$$\frac{dF(t(x))}{dx}=U'(x)=f(x)$$

于是我们证明了

$$\int f(x)\,dx=F(t(x))+C$$

一般教材上使用第二换元积分法时要求：可微函数 $x=x(t)$ 存在“反函数 $t=t(x)$”关系。显然，若反函数存在，则自然满足恒等式 $x(t(x))\equiv x$．但反过来满足恒等式 $x(t(x))\equiv x$ 并不意味着反函数存在。上面的定理实际上说明：只需要函数 $x=x(t)$ 可微且有函数 $t=t(x)$ 满足恒等式 $x(t(x))\equiv x$，即可使用第二换元积分法。无须反函数存在或单调性假设。

第二换元积分法主要是“**一阶微分形式不变性**”的体现，目的是简化被积函数的结构，使得容易求解。这两类换元积分法可以推广到一元定积分理论中，这里不细说了，详细内容请参考《**数学分析新讲**》。重积分中也有换元积分公式，但根据经验，高维积分换元主要是为了将积分域变得简单，一维积分换元主要是为了将被积函数变得简单，这一点区别要注意。

尽管不定积分的技巧非常多，但必须指出，大部分初等函数是积不出来的，即原函数是非初等函数。比如下列积分

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx\ ,\ \int e^{-x^2}dx\ ,\ \int \frac{1}{\ln x}\,dx\ ,\ \int \sin x^2\,dx\ ,\ \int \cos x^2\,dx$$

即便是不涉及超越函数的第一类椭圆积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

其原函数也是非初等的。原函数是非初等积分也称不可积。

据笔者查阅到的文献，**目前还没有判定一个连续函数的不定积分是否为非初等积分的“万能准则”（充要条件）**，大部分判定定理只能针对某一类函数成立。比如下面的定理

**（定理）设 $f\,,g$ 为有理函数，$g$ 不是常值函数，如果 $\int f(x)e^{g(x)}\,dx$ 是初等函数，则存在有理函数 $h$，使得**

$$\int f(x)e^{g(x)}\,dx = h(x)e^{g(x)} + C\,.$$

这个定理的证明涉及微分代数，有兴趣的读者可自行查阅相关文献。

在积分理论中，有一类非常重要的变换，即含参数变换。

$$\varphi(t) = \int_{\mathbf{R}} f(x)K(x\,,t)\,dx$$

这里 $t$ 是参变量，$K(x\,,t)$ 称为核函数。这种方法也是定义非初等函数的一种常见方法，比如数学分析里非常重要的 $\Gamma$ 函数和 **B** 函数。参变量核函数方法的典型例子有两个，一个是多项式逼近连续函数定理中的 **Landau** 方法

$$P_n(t) = \int_0^1 f(x)\,\Delta_n(t-x)\,dx$$

其中核函数为

$$K(x\,,t) = \Delta_n(t-x) = c_n(1-(t-x)^2)^n$$

另一个例子是，**Fourier** 求和理论中**狄利克雷积分**

$$S_m(x\,,f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt$$

这里不仅涉及核函数，也涉及到卷积运算。关于卷积运算的进一步内容可参考卓里奇的《数学分析》下册。

细细品味**积分**，发现其是一种**加权求和的极限过程，含有平均的意味**。很多函数经过积分处理（比如卷积），得到的新函数性质往往比较好，可以进行求导、积分等光滑运算。其中有一种方法令笔者印象非常深刻，称之为**收敛因子法**。下面用例子来说明，考虑广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=?$$

我们引入一个**收敛因子** $e^{-tx}$，然后定义一个新的函数

$$\varphi(t)=\int_0^{+\infty}e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx$$

数学分析中证明了新函数 $\varphi(t)$ 有很好的性质，可以积分号下直接求导，于是

$$\varphi'(t)=-\int_0^{+\infty}e^{-tx}\sin x dx=-\frac{1}{1+t^2}$$

等式右边的函数可以求出原函数，再利用放缩和无穷过程，不难得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\varphi(0)=C=\frac{\pi}{2}$$

**能够熟练地构造收敛因子，并进行微分和积分计算，这可是硬功夫和绝技。**物理大师**费曼**就特别擅长此法，根据其在自传中回忆，他一直不会用复变函数中的围道积分方法，所以一直用含参数积分方法（积分号下求导和积分），并且解决了很多数学系棘手的问题。

微分中比较典型的代表是凑全微分的**积分因子法**，考虑下面的微分形式

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

如果能找到一个可微函数 $M(x,y)$，使得存在函数 $U(x,y)$，满足

$$dU(x,y)=M(x,y)P(x,y)dx+M(x,y)Q(x,y)dy$$

则称 $M(x,y)$ 为积分因子。

这种凑全微分的积分因子法很像高中时的凑不等式方法，技巧性和经验性较强。若能成功找到积分因子，解决问题还是相当简洁的。

级数理论中也有变换的代表，如著名的**阿贝尔变换**（分部求和）和**算术平均求和法**。这里主要说说后者，记

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_n$$

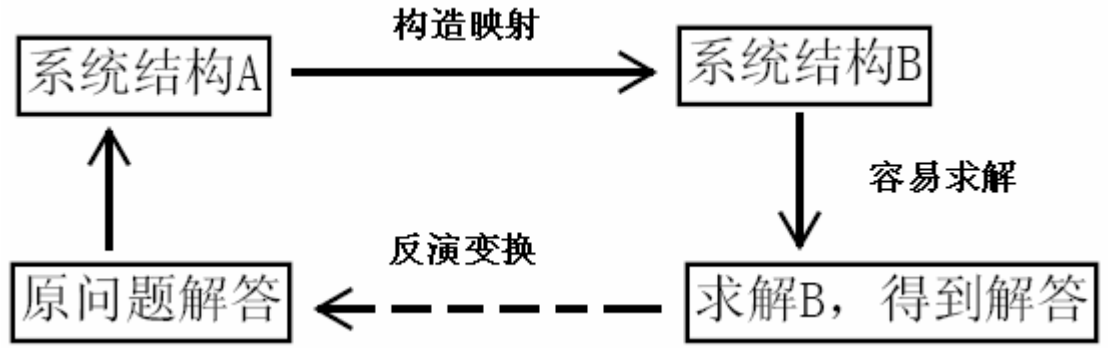
算术平均求和法即考虑

$$\frac{S_1+S_2+\cdots+S_m}{m}\to ?$$

如果极限$\lim S_n=S$存在，则算术平均和的极限也存在，同样等于$S$；反过来，如果极限$\lim S_n=S$不存在，算术平均和的极限也**可能存在**。有些时候，根据具体问题，可能需要算术平均和的极限相关结论。比如连续函数的 **Fourier** 级数不一定处处收敛，但其算术平均和（费耶和）却是一致收敛的。

接下来说说一种十分重要和实用的变换思想，所谓 **RMI 原理**。

即关系**(Relation)**、映射**(Mapping)**、反演**(Inversion)**原理。它是经过建立一种映射，把所研究的对象从一个系统结构 **A** 中映射到另一个系统结构 **B** 中去，利用新的系统中的知识，研究问题的解，然后再通过反演，得到原来问题的解答。以上想法，大致可由下图来说明




**RMI** 原理示意图

**RMI** 原理要求 **B** 相对于 **A** 是容易求解的，这方面最具代表性的例子是 **Fourier** 变换和 **Laplace** 变换了。例如，利用 **Fourier** 变换求解常微积分方程$p(D)f=g$. 这里$p$是一个常系数多项式，$D$是微分算子，函数$g=g(x)$是已知的，求未知函数$f=f(x)$. **Fourier** 变换的优点之一是把微分运算变为代数运算，后者在数学上更容易处理。将 **Fourier** 变换（**构造映射**）

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

作用在常微分方程$p(D)f=g$两边，得到

$$q(\omega)\hat{f}(\omega)=\hat{g}(\omega)$$

于是可以直接求解

$$\hat{f}(\omega)=\hat{g}(\omega)/q(\omega)$$

最后，等式两边作**反演变换**（**Fourier** 逆变换），得到$f=f(x)$.

上面说得比较抽象，想具体了解还是要找几个例子算一算，这方面读者可

参考《数学物理方法》方面的教材。

最后说的这个例子（个人的珍爱）是关于重积分变量代换公式的。内容摘自《**数学分析新讲**》第二册，这里重点说一下新讲中的证明思想，它将**逼近**、**变换**与**分解**这三大数学分析思想融为一体。

（**重积分变量代换定理**）设$\Omega\subset\mathbf{R}^m$是一个开集，

$$\varphi:\Omega\to\mathbf{R}^m$$

是一个连续可微映射，$E\subset\Omega$是一个闭若尔当可测集。如果

（**1**） 雅可比行列式$\det D\varphi(t)\neq 0\ ,\forall t\in\operatorname{int}E$；

（**2**） $\varphi$在$\operatorname{int}E$中是单射。

那么$\varphi(E)$也是一个闭若尔当可测集，并且对于任何在$\varphi(E)$上连续的函数$f(x)$都有

$$\int_{\varphi(E)}f(x)\,dx=\int_E f(\varphi(t))\,|\det D\varphi(t)|\,dt\,.$$

这个定理的证明有些复杂，张筑生老师把它拆成若干引理，每个引理相对容易证明一些。为方便讨论，引入 **max** 度量$\rho(x,y)=|x-y|=\max|x^i-y^i|$，这里$x^i$是向量$x$的第$i$个坐标分量。

新讲中，前面几个引理主要关于可积性条件讨论的，不是本质部分，真正核心部分是从**简单图形逼近**开始，想法是**“采用把局部微分同胚分解成简单微分同胚的复合**，然后再转化为累次积分来证明”。

如果$\mathbf{R}^n$的子集$S$可以表示为**有限个**两两**无公共内点**的闭方块的并集，那么我们就说$S$是一个**简单图形**。任何简单图形当然都是闭若尔当可测集。新讲中证明了：为证明重积分变量代换公式，只需要考虑积分区域最简单的情形。即如下结论成立：

设$\Omega\subset\mathbf{R}^m$是一个开集，$E\subset\Omega$是一个闭若尔当可测集，而

$$\varphi:\Omega\to\mathbf{R}^m$$

是一个连续可微映射，且满足

（**1**） 雅可比行列式$\det D\varphi(t)\neq 0\ ,\forall t\in\operatorname{int}E$；

（**2**） $\varphi$在$\operatorname{int}E$中是单射。

如果函数$f$在集合$\varphi(E)$上是连续，并且对任意闭方块$\Pi\subset\operatorname{int}E$，都有

$$\int_{\varphi(\Pi)} f(x)\,dx = \int_{\Pi} f(\varphi(t))\,|\det D\varphi(t)|\,dt$$

那么就有

$$\int_{\varphi(E)} f(x)\,dx = \int_{E} f(\varphi(t))\,|\det D\varphi(t)|\,dt$$

上述定理是分析中**“逼近思想”**的充分体现。

接下来讨论所谓**“简单变换”**

设 $\varphi^h(t^1,\cdots,t^m):\Omega\to\mathbf{R}$ 是一个连续可微函数，我们把如下形状的变换称为**简单变换**：

$$\begin{cases} x^i = t^i \quad, i\neq h \\ x^h = \varphi^h(t^1,\cdots,t^m) \end{cases}$$

换句话说，简单变换是这样一种连续可微映射

$$\varphi:\Omega\to\mathbf{R}^m$$

它（至多）只改变 $t=(t^1,\cdots,t^m)\in\Omega$ 的一个坐标。

我们先对简单变换证明重积分变量代换公式成立。

**定理**：设 $\Omega\subset\mathbf{R}^m$ 是一个开集，$E\subset\Omega$ 是一个闭若尔当可测集，而

$$\varphi:\Omega\to\mathbf{R}^m$$

是一个**简单变换**，且满足

（1） 雅可比行列式 $\det D\varphi(t)\neq 0\ ,\forall t\in\operatorname{int}E$；

（2） $\varphi$ 在 $\operatorname{int}E$ 中是单射。

如果函数 $f$ 在集合 $\varphi(E)$ 上是连续，那么

$$\int_{\varphi(E)} f(x)\,dx = \int_{E} f(\varphi(t))\,|\det D\varphi(t)|\,dt$$

**证明**：必要时给变量重新编号，可设简单变换 $x=\varphi(t)$ 具有这样的形式

$$\begin{cases} x^i = t^i \quad, i=1,2,\cdots,m-1 \\ x^m = \psi(t^1,\cdots,t^m) \end{cases}$$

根据引理 5，只须对任意闭方块 $\Pi\subset\operatorname{int}E$，证明公式

$$\int_{\varphi(\Pi)} f(x)\,dx = \int_{\Pi} f(\varphi(t))\,|\det D\varphi(t)|\,dt.$$

不妨设在 $\Pi$ 上有

$$\det D\varphi(t) = \frac{\partial\psi}{\partial t^m} > 0$$

（另一种情形可类似讨论）。把 $\Pi$ 写成

$$\Pi = \Pi' \times \Pi'' \subset \mathbf{R}^{m-1} \times \mathbf{R}$$

这里

$$\Pi' = [\boldsymbol{\alpha}^1, \boldsymbol{\beta}^1] \times \cdots \times [\boldsymbol{\alpha}^{m-1}, \boldsymbol{\beta}^{m-1}]$$
$$\Pi'' = [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$$

于是，我们有

$$\varphi(\Pi) = \left\{ (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}^m) \middle| \begin{array}{c} \boldsymbol{x}' \in \Pi' \\ \psi(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{\alpha}) \le \boldsymbol{x}^m \le \psi(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{\beta}) \end{array} \right\}$$

因而由**累次积分**公式，得到

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(\Pi)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} &= \int_{\Pi'} d\boldsymbol{x}' \int_{\psi(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{\alpha})}^{\psi(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{\beta})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}^m)\, d\boldsymbol{x}^m \\
&= \int_{\Pi'} d\boldsymbol{x}' \int_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}', \psi(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{t}^m)) \frac{\partial \psi(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{t}^m)}{\partial \boldsymbol{t}^m}\, d\boldsymbol{t}^m \\
&= \int_{\Pi'} d\boldsymbol{t}' \int_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}', \psi(\boldsymbol{t}', \boldsymbol{t}^m)) \frac{\partial \psi(\boldsymbol{t}', \boldsymbol{t}^m)}{\partial \boldsymbol{t}^m}\, d\boldsymbol{t}^m \\
&= \int_{\Pi} \boldsymbol{f}(\varphi(\boldsymbol{t})) \,|\det \boldsymbol{D}\varphi(\boldsymbol{t})|\, d\boldsymbol{t}
\end{aligned}$$

于是我们对简单变换证明了重积分变量代换公式成立。

从上面可以看出，简单积分区域和简单变换的妙处了吧，方便利用累次积分，上述证明是变换与分解的结合。对于一般的连续可微变换，我们把它**分解**成一些列简单变换的复合。需要注意的是，这种分解通常只在局部情形成立，整体分解一般不存在。这里采用的思想就是**“把局部微分同胚分解成简单微分同胚的复合”**，这种方法体现了**“分解思想”**。

**定理：**设 $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ 是一个开集，

$$\varphi : \Omega \to \mathbf{R}^m$$

是一个连续可微映射，$\boldsymbol{\tau} \in \Omega$．如果 $\det \boldsymbol{D}\varphi(\boldsymbol{\tau}) \ne 0$，那么存在 $\boldsymbol{\delta} > 0$，使得重积分变量代换公式对于包含在**邻域** $\boldsymbol{U}_\rho(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\delta})$ 之中的任何闭若尔当可测集成立。这就是说，对任何闭若尔当可测集 $\boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{U}_\rho(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\delta})$ 和任何在 $\varphi(\boldsymbol{E})$ 上连续的函数 $\boldsymbol{f}$，都有

$$\int_{\varphi(\boldsymbol{E})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{f}(\varphi(\boldsymbol{t})) \,|\det \boldsymbol{D}\varphi(\boldsymbol{t})|\, d\boldsymbol{t}\,.$$

**证明：**因为

$$\det \boldsymbol{D}\varphi(\boldsymbol{\tau}) = \frac{\partial(\varphi^1, \cdots, \varphi^m)}{\partial(\boldsymbol{t}^1, \cdots, \boldsymbol{t}^m)}(\boldsymbol{\tau}) \ne 0$$

所以这行列式前 $m-1$ 行至少有一个不等于 **0** 的 $m-1$ 阶子式。我们可以给变量 $t^1,\cdots,t^m$ 重新编号，使得 $\det D\varphi(\tau)$ 的 $m-1$ 阶主子式

$$\frac{\partial(\varphi^1,\cdots,\varphi^{m-1})}{\partial(t^1,\cdots,t^{m-1})}(\tau)\neq 0$$

仿此，用数学归纳法可以证明：适当地给变量 $t^1,\cdots,t^m$ 编号，可以使得 $\det D\varphi(\tau)$ 的各阶顺序主子式都不等于 **0**. 在下面的讨论中，假定变量 $t^1,\cdots,t^m$ 已经按照这样的要求排列妥当。

我们定义 $m$ 个变换（**分解思想**），

$$\theta_k:\begin{cases} x^i=\varphi^i(t^1,\cdots,t^m) & ,i\le k \\ x^j=t^j & ,j>k \end{cases}$$

这里 $k=1,2,\cdots,m$.

容易看出，$\det D\theta_k(\tau)$ 与 $\det D\varphi(\tau)$ 的第 $k$ 个顺序主子式相等，因而

$$\det D\theta_k(\tau)\neq 0 \quad ,k=1,2,\cdots,m$$

我们可以选取 $\delta>0$ 充分小，使得这 $m$ 个变换 $\theta_1,\cdots,\theta_m$ 在开集 $U_\rho(\tau,\delta)$ 之上都是微分同胚（这里用到了逆映射定理）。再令

$$\begin{cases} \psi_1=\theta_1 \\ \psi_k=\theta_k\circ\theta_{k-1}^{-1} & ,k=2,\cdots,m \end{cases}$$

由此可知，$\psi_1=\theta_1$ 是定义在开集 $U_\rho(\tau,\delta)$ 之上的简单变换，$\psi_k=\theta_k\circ\theta_{k-1}^{-1}$ 是定义在 $\theta_{k-1}(U_\rho(\tau,\delta))$ 之上的简单变换，并且在 $U_\rho(\tau,\delta)$ 之上有

$$\varphi=\psi_m\circ\psi_{m-1}\circ\cdots\circ\psi_1$$

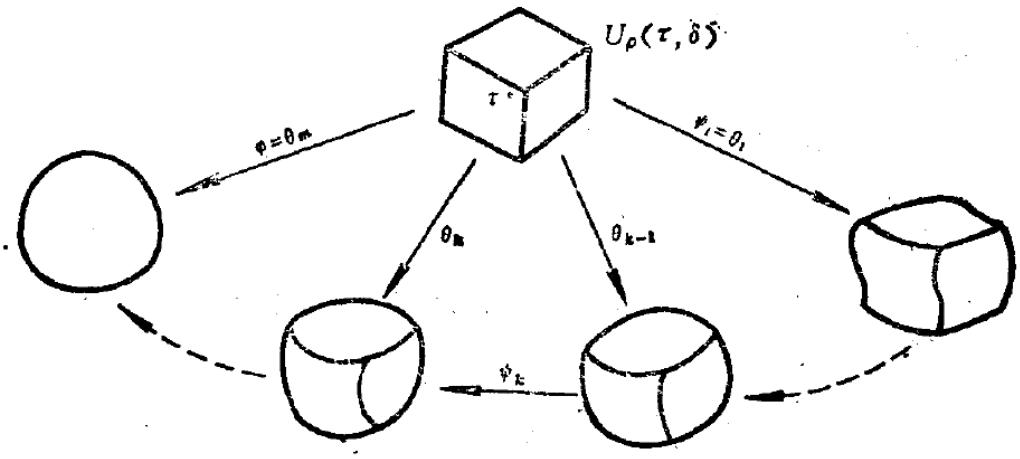
这样我们已将 $\varphi$ 局部地分解为简单变换的复合，在此基础上逐次应用引理 **6** 得到

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(E)}f(x)\,dx&=\int_{\psi_m\circ\psi_{m-1}\circ\cdots\circ\psi_1(E)}f(x)\,dx\\&=\int_{\psi_{m-1}\circ\cdots\circ\psi_1(E)}f(\psi_m(u))\,|\det D\psi_m(u)|\,du\\&=\cdots\cdots\\&=\int_E f(\varphi(t))\,|\det D\varphi(t)|\,dt\end{aligned}$$

这样我们就证明了结论。

一般地，整体微分同胚是很强的条件，通常难以满足，而局部微分同胚相对容易满足。这里我们证明了重积分变量代换公式是局部成立的，为了得到整

体性结论，只需利用紧致性（**有限覆盖**）与积分的有限可加性即可，证明细节可参考新讲第二册，这里从略。




**简单变换分解** $\varphi=\psi_m\circ\psi_{m-1}\circ\cdots\circ\psi_1$ **示意图**

最后笔者说一点题外话，为什么一再强调要读一些著名定理（比如重积分变量代换定理）。著名定理通常比较难，证明也比较长，通常考试不会考，课堂上可能也没时间讲。但站在学习的角度看，著名定理的证明往往涉及多方面知识的综合运用，就像本文举了一堆例子，但还是重积分变量代换定理的证明最能体现逼近、变换与分解三大思想的巧妙融合。一般的定理或习题，很难体现知识的交叉运用，而交叉综合运用恰恰是数学分析思想的精华所在。为什么有些人单章刷题非常顺手，但遇到名校真题（综合题）就感到很困难，其症结也在此。在科研中就更是如此了，局部战是少见的，打综合战和整体战确实很常见的，而且有时候甚至事先不清楚到底哪种方法或工具能解决问题。很多导师鼓励学生数学阅读面尽可能广泛一些，也是有良苦用心的，眼光开阔一些总是有好处的。

# 数学分析三大基本思想之分解

***SCIbird***

**说明**：鉴于笔者时间和精力有限，文章小错误难免。因此笔者建议读者最好将文章中的结论动手推导一遍，相信必有收获。光看不练，等于白看。

本章介绍数学分析中的三大基本思想之**分解**。需要强调的是，**逼近、变换和分解这三大分析基本思想是统一的，在处理数学问题时常常是综合运用。**

笔者将分解看作这样一种数学思想：**将一个复杂的结构或问题，分解成若干子结构，使得这些子结构尽可能简单**。若按照广义理解，从一个复杂问题中分离出主要矛盾，这也是一种分解思想。

前者的例子可以考虑幂级数分解，如考虑超越函数

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots$$

如此将一个复杂的超越函数 $e^z$ 分解成幂级数形式，而幂级数可以看做多项式的推广，而我们对子结构 $z^n$ 非常熟悉（*可类比整数的加减乘除运算*）。实际上，幂级数是研究超越函数的有力工具。当然我们也可以使用 **Fourier** 级数，或者其它函数级数。

后者的例子可以考虑微分，考虑函数增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$，数学上证明了对可导函数，有

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

$\Delta y$ 的**线性主部**记为 $dy = f'(x)\Delta x$（*微分*），$dy$ 对 $\Delta y$ 的贡献较大，属于主要矛盾。如此，我们从一个非线性增量中，分离出线性部分，达到简化问题的目的。这个例子很平凡，但却很实用，特别在物理分析中（*如微元法*）。很多宏观物理过程在短时间内或小尺度范围内变化很小，可以近似为线性过程。

数学上已经证明了非初等函数是大多数，而研究非初等函数的常见途径有三个，即**积分法**（如含参数积分）、**微分方程法**和**级数法**（特别是幂级数法）。从实用角度看，级数法更方便，比如利用幂级数进行数值计算。

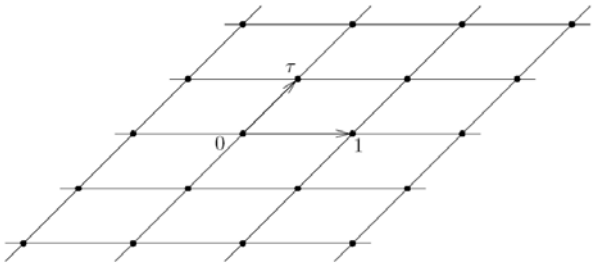
用级数研究非初等函数的著名例子是椭圆函数。当年高斯和阿贝尔提出了研究椭圆积分的反函数，后称椭圆函数，这种函数有两个不共线的复周期 $\omega_1, \omega_2$

满足 $f(z+\omega_1)=f(z+\omega_2)=f(z)$。与历史不同，现在教材上直接定义具有不共线的复周期 $\omega_1$ , $\omega_2$ 的亚纯函数为椭圆函数。

那么能不能不利用积分反演，直接构造双周期的椭圆函数。直观上不难想象，椭圆函数的所有周期是复平面上一些**格子（周期格）**

$$\Lambda=\{m\omega_1+n\omega_2\mid m,n\in\mathbf{Z}\}$$

其中复数 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 是实线性无关的。




那么**形式上**，如下函数满足双周期性：

$$\sum_{\omega\in\Lambda}\varphi(z-\omega)\text{或}\prod_{\omega\in\Lambda}\varphi(z-\omega)$$

这里函数 $\varphi$ 待定。

之所以强调是形式上，是因为要使得上面的函数有意义，还要**考虑收敛性**问题。椭圆函数中最有名的要数**魏尔斯特拉斯椭圆函数**：

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{0\neq\omega\in\Lambda}\left[\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right]$$

据说，这种形式的构造类比了**余切级数展开**（欧拉等式）

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{z-n}\right)$$

**注**：数学上可以证明非常数椭圆函数在一个周期四边形内必有奇点，且阶数至少是二（证明见《**特殊函数概论**》），$\wp(z)$ 的构造选择了一个二阶极点的情形（不妨设 $z=0$ 为二阶极点）。于是根据椭圆函周期性要求，可知 $z=\omega$ 为二重极点。再由上面**形式级数**的思想，考察下列函数就自然了：

$$\sum_{0\in\Lambda}\frac{1}{(z-\omega)^2}$$

但是这个级数不收敛，所以为满足收敛性还得再减去一项 $1/\omega^2$．当 $\omega=0$ 这种情况下，$1/\omega^2$ 发散，所以应该剔除，同时把 $1/z^2$ 单独写出来。于是级数

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{0\neq\omega\in\Lambda}\left[\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right]$$

是收敛的，具有二阶极点，且满足$\wp(z+\omega_1)=\wp(z+\omega_2)=\wp(z)$.

$\wp(z)$的导数$\wp'(z)$也是椭圆函数，它们之间满足上面的微分方程

$$\wp'(z)^2=4\wp(z)^3+g_2\wp(z)+g_3$$

$\wp(z)$和$\wp'(z)$也所以非常重要，是因为它们不仅形式简单，还可以作为“基函数”，这种**基函数分解**思想（当然不是线性的）可以由下述定理描述：

设$\wp(z)$的周期为$\omega_1,\omega_2$，则所有以$\omega_1,\omega_2$为双周期的椭圆函数

$$f(z+\omega_1)=f(z+\omega_2)=f(z)$$

都可以表示成下列形式

$$f(z)=H(\wp(z))+\wp'(z)Q(\wp(z))$$

其中，$H(z),Q(z)$为有理函数，与$f(z)$有关。

有了这个定理，研究椭圆函数的重点可以放在研究基函数$\wp(z)$和$\wp'(z)$上，这是利用分解思想，缩小问题范围的经典例子。

分解思想在数学中非常普遍（不仅仅是数学分析），我们在证明一个复杂数学定理时，常常分成若干引理（如前面章节多次提到的重积分变量代换定理），这其实应用了分解思想。**学会如何把一个复杂问题简化，拆成若干简单问题，这是一门真功夫，需要能力和经验的积累。**

**分解思想的重要性还体现在可操作性上。**数学上很多定义逻辑上很抽象，也很完备，但单靠定义是无法操作的。比如重积分的 **Riemann** 和定义，如果靠重积分的 **Riemann** 和定义来计算，甚至证明数学定理，恐怕举步维艰。累次积分就应运而生

$$\iint\limits_{X\times Y} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_X dx\int\limits_Y f(x,y)\,dy$$

**累次积分**的妙处还在于**“给无序的定义引入一种有序的计算”**。在无序中引入顺序或偏序，这种思想的妙用不仅仅在数学中存在，大家需要好好体会。本书第三章证明重积分变量代换定理的关键地方就利用了累次积分：

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(\Pi)} f(x)\,dx&=\int_{\Pi'}dx'\int_{\psi(x',\alpha)}^{\psi(x',\beta)} f(x',x^m)\,dx^m\\&=\int_{\Pi'}dx'\int_\alpha^\beta f(x',\psi(x',t^m))\frac{\partial\psi(x',t^m)}{\partial t^m}\,dt^m\\&=\int_{\Pi'}dt'\int_\alpha^\beta f(t',\psi(t',t^m))\frac{\partial\psi(t',t^m)}{\partial t^m}\,dt^m\\&=\int_\Pi f(\varphi(t))\,|\det D\varphi(t)|\,dt\end{aligned}$$

广义上理解，**递归关系**或者递推关系 $a_{n+1}=f(a_n)$ 也可以看做是**一种分解**，即在同一法则 $f$ 下形成一种逐级发展的**“自相似结构”**。比如我们计算积分

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

时，就设法建立 $a_n$ 与 $a_{n-2}$ 的递归关系。利用分部积分

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,d(-\cos x)=-\cos x\sin^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,d(\sin^{n-1}x)$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx=(n-1)a_{n-2}-(n-1)a_n$$

可知递推关系

$$a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-2}$$

容易算出 $a_0=\dfrac{\pi}{2}$ ，$a_1=1$，于是

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n=2k\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2k+1\end{cases}$$

**建立递归关系是一种可操作性非常强的分解思想，不论是在解题或者是科研中，非常实用，大家应该熟练掌握。**

说到递归关系，有一个非常经典的例子，将逼近与递归联系到一起。这就是求解非线性方程的经典解法---**牛顿迭代法**。

非线性问题非常复杂，直接求解基本不可能，于是人们发展了一些实用性较高的近似方法来求解非线性问题。如压缩映射不动点法和牛顿迭代法（又称切线法），我们主要谈谈后者。

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，并且满足

$$f(a)f(b)<0\ ,\ f'(x)\neq 0\ ,\forall x\in[a,b]$$

根据函数零点定理（介值定理），可知 $f(x)=0$ 在区间 $(a,b)$ 内至少有一根 $\xi$。根据 $f'(x)\neq 0$ 可知导数在区间内不变号（根据**导数介值定理**），因而是严格单调的。所以可知 $\xi$ 是惟一的。

那么如何计算零点 $\xi$？牛顿想到了一种切线方法，该方法的具有非常强的几

何直观。切线法的思想：设曲线$y=f(x)$在一点$x_0$处的**切线方程**为

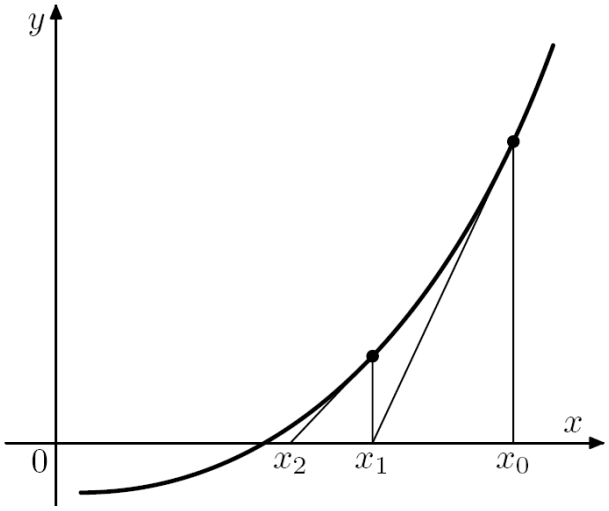
$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

为了近似求解方程$f(x)=0$，这里用上述切线与$x$轴的交点近似代替零点$\xi$.

换句话说，就是用方程

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$$

的解近似代替方程$f(x)=0$的解。




**牛顿迭代法示意图**

上面我们用了逼近思想和变换思想，即局部上用切线近似代替曲线，用线性变换代替非线性变换。

解方程$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$，得到

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

以$x_1$代替$x_0$点，交$x$轴于点$x_2$，于是

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

如此**反复迭代**，得到一个迭代序列$\{x_n\}$（**建立递归关系**）

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\quad n=1,2,\cdots$$

如果此序列存在极限$x_n\to c$，对上式两边取极限，得到

$$c=c-\frac{f(c)}{f'(c)}$$

由此得到$f(c)=0$，再由惟一性可知$\xi=c$.

剩下的问题是如何保证此递归序列存在极限 $x_n \to c$，通常要加上一些附加条件（不唯一），这方面一个比较实用的定理如下：

（**定理**）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可微，并且**满足条件**

$$f(a)f(b)<0\ ,\ f'(x)f''(x)\neq 0\ ,\forall x\in[a,b]$$

如果可以选取**初值** $x_0$ **满足**

$$f(x_0)f''(x_0)>0$$

那么由**迭代序列**

$$x_n = x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\quad n=1,2,\cdots$$

产生的数列 $\{x_n\}$ **单调收敛**于方程 $f(x)=0$ 在区间 $(a,b)$ 内的**惟一解** $\xi$.

**注**：上述定理的证明请参考《**数学分析新讲**》第二册。

利用分解思想研究复杂问题的例子，还有一种比上面分析味道更浓的例子，就是用**幂级数法解微分方程**。这方面有一个很实用的定理：

设二阶常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$$

其系数函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在邻域 $|x-x_0|<r$ 内是单值解析的，则在 $|x-x_0|<r$ 内存在惟一的一个解 $y=y(x)$ 满足：$y(0)=a_0\ ,y'(0)=a_1$ 且

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

作为应用，考虑下面的例子：$y''-2xy'-4y=0\ ,\ \ y(0)=0\ ,y'(0)=1.$

在 $x_0=0$ 点展开成幂级数，令

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

其收敛域为 $(-\infty,+\infty)$. 将幂级数解逐项求导并代回原方程，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^n=0$$

即

$$(2a_2-4a_0)+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n+2)a_n]\,x^n=0$$

上面的幂级数恒等于 **0**，于是幂级数系数均为 **0**，由此得到递推关系

$$\begin{cases} 2a_2 - 4a_0 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+2)a_n = 0 \end{cases}$$

其中 $n = 1, 2, 3, \cdots$

从而得到递推数列 $a_{n+2} = \dfrac{2}{n+1}a_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$

显然，我们只需要求出数列 $a_n$ 的通项公式即可。

因为 $y(0) = a_0 = 0$，$y'(0) = a_1 = 1$，所以利用递推关系得到

$$a_2 = a_4 = \cdots = a_{2n} = 0，n = 1, 2, 3, \cdots$$

于是只需要考虑 $a_{2n+1}$ 的通项公式。此时递推方程为

$$a_{2n+1} = \frac{1}{n}a_{2n-1} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

利用递推公式依次计算得到

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{1}{n}a_{2n-1} \\ a_{2n-1} &= \frac{1}{n-1}a_{2n-3} \\ \cdots \quad & \quad \cdots \\ a_5 &= \frac{1}{2}a_3 \\ a_3 &= \frac{1}{1}a_1 \end{aligned}$$

以上各等式相乘，并利用 $a_1 = 1$，得到

$$a_{2n+1} = \frac{1}{n!} \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

将 $a_n$ 通项公式代入幂级数，得到

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = xe^{x^2}，x \in (-\infty, +\infty)$$

不难验证其满足原方程及初始条件，所以 $y(x) = xe^{x^2}$ 为所求函数。

一般来说，分析给人的印象是涉及连续数学的，而级数兼具连续和离散两种特征，上面的例子就是把一个连续问题，抓化为离散问题。反过来也可以用连续数学的方法求解离散数学问题，代表方法是组合数学中的“**母函数法**”（也称为生成函数法）。

其想法是，对于一个数列$a_0, a_1, a_2, \cdots$，构造一个**形式幂级数**

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

数列$a_0, a_1, a_2, \cdots$之间通常满足某些关系（如递推关系），以此建立$S(x)$的关系式，然后再做泰勒级数展开，其系数就是$a_n$.

还是用例子来说明：考虑传说中的斐波那契数列

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$$

写成递推公式：$a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. 这问题标准的解法是特征方程，不过借助分析方法更具特色。

设$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$，再利用$a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$可以建立级数之间的等式$(1 - x - x^2)S(x) = 1$（建议读者动手算一算），于是

$$S(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

把上面的有理函数展开成泰勒级数，求出其系数

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}, \ n = 0, 1, 2, \cdots$$

这就是斐波那契额通项公式。想进一步了解母函数方法的读者可参考组合数学方面的教材。

除了幂级数之外，**Fourier** 级数分解也能解决一些棘手的问题。设$f(x)$是$[-\pi, \pi]$上的连续可微函数，满足$f(\pi) = f(-\pi)$. 如果

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0$$

证明不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx \le \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2\, dx$$

等号成立当且仅当$f(x) = a\sin x + b\cos x$.

证明方法是先将$f(x)$进行周期延拓，再考虑 **Fourier** 级数分解

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

根据题意，可知$a_0 = 0$. 导函数$f'(x)$的 **Fourier** 级数为

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos nx - n a_n \sin nx$$

由帕塞瓦尔等式，可知

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \le \pi \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2) = \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2\, dx$$

等号成立当且仅当$n \geq 2$时，$a_n = b_n = 0$，即$f(x) = a\sin x + b\cos x$．这个不等式叫做 **Wirtinger** 不等式。

最后再次说说《数学分析新讲》第二册给出的重积分变量代换公式

$$\int_{\varphi(E)} f(x)\,dx = \int_E f(\varphi(t))\,|\det D\varphi(t)|\,dt$$

的证明。之所以反复说，是因为这个例子太经典了！我们知道，大多数坐标变换$\varphi$都是非线性的，新讲中的处理方法是考虑**“简单变换”**：

$$\begin{cases} x^i = t^i & , i \neq h \\ x^h = \varphi^h(t^1, \cdots, t^m) \end{cases}$$

换句话说，简单变换是这样一种连续可微映射

$$\varphi : \Omega \to \mathbf{R}^m$$

它（至多）只改变$t = (t^1, \cdots, t^m) \in \Omega$的一个坐标。

简单变换至少比一般的变换$\varphi$要简单。再考虑下面的变换$m$个变换（**分解思想**），

$$\theta_k : \begin{cases} x^i = \varphi^i(t^1, \cdots, t^m) & , i \leq k \\ x^j = t^j & , j > k \end{cases}$$

这里$k = 1, 2, \cdots, m$．使得这$m$个变换$\theta_1, \cdots, \theta_m$在小的开集$U_\rho(\tau, \delta)$之上都是微分同胚（这里用到了**逆映射定理**）。再令

$$\begin{cases} \psi_1 = \theta_1 \\ \psi_k = \theta_k \circ \theta_{k-1}^{-1} & , k = 2, \cdots, m \end{cases}$$

由此可知，$\psi_1 = \theta_1$是定义在开集$U_\rho(\tau, \delta)$之上的简单变换，$\psi_k = \theta_k \circ \theta_{k-1}^{-1}$是定义在$\theta_{k-1}(U_\rho(\tau, \delta))$之上的简单变换，并且在$U_\rho(\tau, \delta)$之上有

$$\varphi = \psi_m \circ \psi_{m-1} \circ \cdots \circ \psi_1$$

**这种分解可以类比线性代数中，将一个非奇异方阵表示成若干初等矩阵的乘积思想**。都是将一个复杂对象，分解成若干简单对象的复合，这也是人类认识世界的一种自然方法。

**评注：**微分、积分和级数三大领域是数学分析的基石，逼近和变换这两章的大部分内容都涉及微分和积分，为了不厚此薄彼，本章大部分内容与级数有关。级数是一门强大的数学工具，不论是牛顿、高斯、雅可比、魏尔斯特拉斯，还

是庞加莱，都是运用级数的大师。级数理论的综合运用是“分解”思想的最佳例子，同时最好结合一些线性代数的分解思想。

说到分解思想，笔者想起了高中时一件小事。那时笔者已经初步掌握了单元微分法和积分法，偶然在一篇文章中看到**“矢量也可以积分”**的内容，感到无比诧异。习惯了代数思维的自己，很难想象矢量如何积分。后来，隔了一年多才想明白，其实也简单。矢量可以投影到三维坐标轴上，得到三个分量。**然后用矢量分量的坐标表示，从而将一个矢量积分转化为三个代数积分**。多年后回想这件事情仍然很有意思，困惑不在于技术上，而在于理念或想法的转变上。这个例子本质上是将**“几何思维转化为代数思维”**，这种转化远不像字面上那样容易。

# 抓住问题的核心

*SCIbird*

**说明**：鉴于笔者时间和精力有限，文章小错误难免。因此笔者建议读者最好将文章中的结论动手推导一遍，相信必有收获。光看不练，等于白看。

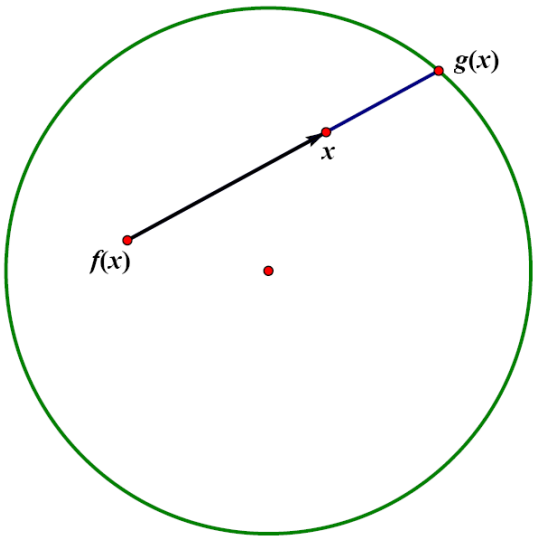
原本打算以“**抓住问题的本质**”为标题的，但再三斟酌之后觉得不妥，还是换成“**抓住问题的核心**”这个标题吧。比如，虽然可以用非常漂亮的分析方法来证明布劳威尔不动点定理，但是要想讨论不动点定理的本质，肯定要将讨论框架扩展到拓扑领域。尽管如此，这个漂亮分析证明仍然值得推荐！

布劳威尔不动点定理：

**设 $D^n$ 是 $n$ 维单位闭球，$f: D^n \to D^n$ 是连续映射，则存在 $x_0 \in D^n$，满足 $f(x_0) = x_0$.**

在布劳威尔不动点定理的条件中，单位闭球 $D^n$ 的凸性非常重要。比如把 $D^n$ 换成单位球面 $S^n$，则结论不再成立。反例是映射 $f(x) = -x$，显然映射 $f: S^n \to S^n$ 是连续映射，但没有不动点。

《**数学分析新讲**》第三册给出了布劳威尔不动点定理的解析证明。**证明的核心思想在于下面这张图**




如果布劳威尔不动点定理不成立，那么可以做出一个映射 $g: D^n \to S^{n-1}$ 满足 $g(x) = x$ ，$x \in S^{n-1}$. 这样的连续映射 $g$ 称为收缩映射，$S^{n-1}$ 称为 $D^n$ 的收缩核。然后证明这样的收缩核实际上不存在，从而不动点定理为真。

为利用分析工具，先假设 $f$ 为光滑映射。反证假设 $f$ 没有不动点，于是构造出光滑的收缩映射 $g: D^n \to S^{n-1}$. 接着利用外微分中的 **Stokes** 公式证明这个光

滑收缩映射 $g$ 是不存在的。证明方法是**计算两次思想**，即对同一个对象用两种不同的方法计算，结果应该是一样的。否则，即产生矛盾。

**设** $g=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$，**构造微分形式** $\omega=g_1dg_2\wedge\cdots\wedge dg_n$.

一方面，$g(x)=x\in S^{n-1}=\partial D^n$，所以 $\|g(x)\|=1$，$\forall x\in S^{n-1}$，从而

$$\int_{\partial D^n}\omega=\int_{D^n}d\omega=\int_{D^n}d(g_1dg_2\wedge\cdots\wedge dg_n)$$
$$=\int_{D^n}\frac{\partial(g_1,\cdots,g_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n=0$$

另一方面，由 $g(x)=x$，$x\in S^{n-1}$，直接代入，得到

$$\int_{\partial D^n}\omega=\int_{D^n}d\omega=\int_{D^n}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n=\mathrm{vol}(D^n)>0$$

这就证明了**不存在光滑的收缩映射** $g:D^n\to S^{n-1}$.

于是证明了当 $f$ 是光滑映射时，存在不动点。对于连续映射，可以选择一个光滑映射序列来一致逼近。假设连续映射 $f:D^n\to D^n$ 没有不动点。

因为单位闭球是有界闭集（紧致性），所以连续函数 $\|f(x)-x\|$ 在 $D^n$ 上一定取得正的最小值 $\mu=\min\|f(x)-x\|>0$. **取定** $\varepsilon>0$ 满足

$$0<3\varepsilon<\mu=\min\|f(x)-x\|$$

根据魏尔斯特拉斯逼近定理，存在多项式向量函数 $p(x)$，使得

$$\|f(x)-p(x)\|<\varepsilon$$

不过对于 $x\in D^n$ 可能有 $p(x)\notin D^n$（映射到单位闭球外面）。但可以判定

$$\|p(x)\|\le\|p(x)-f(x)\|+\|f(x)\|<1+\varepsilon$$

于是令

$$h(x)=\frac{1}{1+\varepsilon}p(x)$$

则得到光滑映射 $h:D^n\to D^n$.

再次利用含绝对值不等式，得到

$$\|h(x)-f(x)\|=\|\frac{1}{1+\varepsilon}p(x)-f(x)\|=\frac{1}{1+\varepsilon}\|p(x)-f(x)-\varepsilon f(x)\|$$
$$\le\frac{1}{1+\varepsilon}\|p(x)-f(x)\|+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\|f(x)\|<\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}<2\varepsilon$$

由此得到估计

$$\|h(x)-x\|\ge\|x-f(x)\|-\|h(x)-f(x)\|\ge3\varepsilon-2\varepsilon=\varepsilon>0$$

但是根据前面的结论，光滑映射 $h$ 具有不动点 $h(x)=x$，矛盾！定理成立。

**注：**《新讲》的证明是非常严格的，必须证明**利用射线做出的映射** $g: D^n \to S^{n-1}$ **确实是光滑映射**。证明请看《新讲》原文。

根据经验，数学分析中很多结论往往要在后续高级课程（如复变和实变）中才能看得清问题关键所在。比如 **Riemann** 积分中的**控制收敛定理**（也称阿尔泽拉定理）

设闭区间 $[a, b]$ 上的 **R** 可积函数序列 $\{f_n(x)\}$ 点点收敛于某个 **R** 可积函数 $f(x)$，即 $f_n(x) \to f(x)$。如果函数序列 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致有界，即存在 $M > 0$，使得

$$|f_n(x)| \le M,\ \forall n, \forall x \in [a, b]$$

恒成立。则有积分关系（**积分运算与极限运算可交换**）

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \quad （即 \lim_{n\to\infty} \circ \int_a^b = \int_a^b \circ \lim_{n\to\infty}）$$

根据数学大师 **Lebesgue** 的工作，这一定理可以推广到 **L** 积分中去，一般称为 **Lebesgue** 控制收敛定理，是实变函数课程中最基本的定理了。

（**Lebesgue**）设有限可测集 $E$ 上的可测函数序列 $f_n(x)$ 满足

$$|f_n(x)| \le M\ ,\ \forall x \in E, \forall n \in \mathbf{N}$$

其中 $M > 0$ 为常数。如果 $\lim f_n(x) = f(x)$ 几乎处处成立，那么 $f(x)$ 也是 **L** 可积的，且可以在积分号下求极限：

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, dx = \int_E f(x)\, dx$$

因为可测函数的极限仍然可测，所以不必像阿尔泽拉定理那样额外要求极限函数是可积的。控制收敛定理的关键在于“有限可测集 $E$”的结构和性态特征，这在数学分析课程中，我们难以发现。但是，在实变函数课程中有如下深刻的**叶果洛夫定理：**

设可测集 $E$ 满足 $m(E) < \infty$，可测函数序列 $f_n$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于一个有限的可测函数 $f$，则 $\forall \delta > 0$，存在子集 $E_\delta \subset E$ 满足 $m(E_\delta) < \delta$，且函数序列 $f_n$ 在集合 $E - E_\delta$ 上**一致收敛**于可测函数 $f$.

这个点集定理深刻揭示了“**点点收敛与一致收敛相差不多**”的特征。站在这个角度看控制收敛定理就自然了。

我们可选取选取可测集 $A \subset E$ 使得 $m(E - A)$ 充分小，且 $f_n(x)$ 在 $A$ 上是一致收敛的。于是

$$\begin{aligned}\left|\int_E f_n(x)\,dx-\int_E f(x)\,dx\right| &\le \int_E |f_n(x)-f(x)|\,dx,\\ &\le \int_A |f_n(x)-f(x)|\,dx+\int_{E-A}|f_n(x)-f(x)|\,dx\\ &\le \int_A |f_n(x)-f(x)|\,dx+\int_{E-A}2M\,dx<\varepsilon\end{aligned}$$

这里不等式右边第一项利用了一致收敛性，第二项利用了测度$m(E-A)$可以任意小，从而得到了放缩关系。上面的放缩过程可以严格写成$\varepsilon-\delta$语言，于是证明了控制收敛定理。

现在各行各业，很多人都爱谈抓住问题的本质（笔者也如此），但细细琢磨，发现其实说的是抓住问题的关键地方、核心或主要矛盾。问题的本质岂是那么容易发现的？除非本质这个词被滥用了。不过入乡随俗，大家都这么说，自己也把本质概念作广义理解，本文也如此。

问题的核心常常体现在**内在联系**方面。笔者曾经写过《**类比是一种重要的数学思维**》一文，里面讲述了自己关于类比方法的一些经验。其实，深入挖掘类比的对象某些性质相近，并不是巧合。在某些情况下，两个对象重合了，或者其中一个变成另一个的特殊情况。举一个亲身思考的例子：

笔者是工科出身，因而先接触到罗比达法则，后自学《新讲》接触到 **Stolz** 定理。发现两者很有意思，一个是关于连续的，一个是关于离散的，形式上也挺像。以$\frac{0}{0}$型极限问题为例，罗比达法则不难理解，因为有柯西中值定理。以此为桥梁，很容易过渡到导数之比上（*假定导数之比的极限存在*）

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

**Stolz** 定理的问题提法很自然，但加上什么条件才行，不太容易想到。笔者后来换了一种思路，还是从罗比达法则出发，站在探索者的角度，能不能猜出一个离散版本的罗比达法则。

首选在$(a,b)$中选择一个严格单调递减的数列$\{t_n\}$，满足$t_n\to a$. 容易想到等式左边为

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(t_n)}{g(t_n)}$$

但是等式右边的导数极限如何替换？笔者后来想到了用差商代替导数，本质上还是柯西中值定理

$$\frac{f(t_n)-f(t_{n+1})}{g(t_n)-g(t_{n+1})}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

再由$\lim t_n=\lim \xi_n=a$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(t_n)-f(t_{n+1})}{g(t_n)-g(t_{n+1})}=A$$

所以，得到了一个离散版本的罗比达法则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(t_n)}{g(t_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(t_n)-f(t_{n+1})}{g(t_n)-g(t_{n+1})}=A$$

设$b_n=f(t_n)$，$a_n=g(t_n)$，作为推广，猜想下面形式是一种自然思路

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}=A$$

注意，作为猜想，上面的形式只针对数列，不要求一定存在相应的可导函数$f,g$满足$b_n=f(t_n)$，$a_n=g(t_n)$.

那么除了$\lim b_n=\lim a_n=0$这个条件外，还需要额外条件吗？注意到罗比达法则要求分母$g(x)$满足：$g'(x)\neq 0,\forall x\in(a,b)$．由导数介值定理可知，或者$g'(x)>0$恒成立，或者$g'(x)<0$恒成立。总之$g(x)$是严格单调函数。于是猜想中$a_n=g(t_n)$必须是严格单调数列。

综上，猜出了 **Stolz** 定理：设数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足$\lim b_n=\lim a_n=0$且$\{a_n\}$是严格单调递减的，若存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}=A$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}=A$$

这里$\{a_n\}$是严格单调递增的也可以，此时考虑$-a_n$即可。

**Stolz** 定理的证明可在任何一本数学分析教材中找到，证明就不细说了。定理的证明与罗比达法则毫无关系，这里主要揭示了两者的相似性不是偶然的，是有内在联系的。**两个不同事物的内在联系往往就是问题的核心所在**，这种事在数学里非常多。这给我们的启示是：**看问题不要孤立，要多注意内在联系。**

当然，单独拿出 **Stolz** 定理，笔者觉得核心是分母 $a_n$ 的单调性，这个性质在证明中起到关键作用，大家要多体会。

笔者在高中时代做文科和理科试题（特别是选择题）时有一个习惯，即读题后，在试卷上用笔圈出**“关键字”**。特别是文科试题，一段话 **100** 多个字，真正有助于解题（或提示）的可能就三个词，而正确选项往往与这三个词相对应。这种圈定“关键字”方法使得自己那时的客观题准确率非常高。当初是为了应试才发现这个方法，后来在读书时也效仿这个方法，找出一篇文章最核心，或者最精华的观点。

上面这个方法在数学中也有用。什么叫做数学能力？不好定义，但有一个标准：假定一个数学定理的证明有 **20** 行，你若能找到证明中最关键的 **3** 行，这就是一种数学能力。为什么高手之间讨论常常话不多，但帮助非常大，就是能直击问题的核心。

初学数分的人必须严格套用 $\varepsilon-\delta$ 语言的格式很长时间，但对高手来说，还纠缠于 $\varepsilon-\delta$ 语言的话，那就什么也不用干了。这就好比一个人学写律诗，初学必须严格按照律诗格式，一丝不苟地套用，甚至有些机械。但到了一定境界后，自由发挥的空间就大了，甚至挥洒自如。新手喜欢全面与具体，高手喜欢简洁与核心，这是不同的思维层次造成的结果。每一个学数学的人，最终都要走到抓问题核心的道路上来（特别是当导师的）。

最后，我们再来谈谈一个难一点的例子，它是关于**形式微分算子法**的。考虑**常微分方程**：$y'=f(x), y(0)=0$．直接利用牛顿莱布尼茨积分公式，得

$$y(x)=\int_0^x f(t)dt$$

英国工程师海维塞德思考上述方法后，提出了一个形式微分算子法，定义算子 $D=\dfrac{d}{dx}$， 则微分方程可写成 $Dy=f(x)$，于是移项得：$y=\dfrac{1}{D}f(x)$

对比上面的积分过程可知 $\dfrac{1}{D}=\int_0^x$ （积分算子），以及 $\dfrac{1}{D^2}=\dfrac{1}{D}\dfrac{1}{D}=\int_0^x\int_0^x$ 等。

海维塞德将这个思想应用到一般的常系数微分方程中去，考虑方程

$$P(D)y=f(x), y(0)=y'(0)=y''(0)=\cdots=y^{(n-1)}(0)=0$$

这里 $P(x)$ 是一个 $n$ 次多项式。于是得到形式解

$$y=\frac{1}{P(D)}f(x)$$

海维塞德认为如果$1/P(D)$能展开成关于$1/D$的幂级数，即

$$\frac{1}{P(D)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{D^k}$$

则原方程的解即为

$$y=\frac{1}{P(D)}f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(\frac{1}{D^k}f(x)\right)$$

以一个具体的例子来说明上述方法可能更容易些。

考虑微分方程：$y'-y=1,\ y(0)=0$，写成算子形式$(D-1)y=1$，这里约定数字 **1** 为恒等算子。则按上面的形式算子方法得到形式解（等比级数展开）

$$y=\frac{1}{D-1}\cdot 1=\frac{1}{D}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{D}}\right)=\frac{1}{D}\left(1+\frac{1}{D}+\frac{1}{D^2}+\cdots\right)\cdot 1$$

根据定义有

$$\frac{1}{D}\cdot 1=\int_0^x 1dt=x\text{，}\quad \frac{1}{D^2}\cdot 1=\frac{1}{D}(\frac{1}{D}\cdot 1)=\int_0^x tdt=\frac{x^2}{2}\text{，}\cdots\text{，}\quad \frac{1}{D^n}\cdot 1=\frac{x^n}{n!}$$

所以 $y(x)=\frac{1}{D}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots\right)=\frac{1}{D}e^x=\int_0^x e^t dt=e^x-1$

代回原微分方程验证，它确实是一个解。

受过严格数学训练的人难以接受这种魔术般的形式方法，但工程师不受此约束，只要这个方法的结果是对的即可，至于数学上的严格性不在考虑范围之内。此所谓“**实用即是合理**”原则。

实际上对于某些问题，这种形式微分算子方法确实比传统方法效率高。当然，本文的关键问题不是方法简洁与否，而是如此奇怪的形式算子方法为什么是对的，是巧合吗？许多数学家不相信有那么多巧合，其背后必定有深刻的数学逻辑。如果不是巧合，那么很可能打开一片新的天地。

历史确实如此，人们经过深入研究发现，上面的形式算子解法本质是一种积分变换，称为 **Laplace-**变换（一般在数学物理方法课程中讲授）。

**L-变换一般定义为：**

$$L[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt=F(p)$$

这属于含参数积分问题，为了保证被积函数的收敛性需要对 $f(t)$ 和正数 $p$（实际可以取复数）附加一些控制条件，实际应用中基本能满足。这里避开一些琐碎数学细节而直奔问题核心。

考虑微分方程：

$$P(D)y=f(x),y(0)=y'(0)=y''(0)=\cdots=y^{(n-1)}(0)=0$$

则根据 **L-变换性质**，有

$$L[y(x)]=Y(p),L[y^m(x)]=p^mY(p),L[f(x)]=F(p)$$

对原方程两边做 **L-变换**得到：$P(p)Y(p)=F(p)$ **---把微分方程变换成代数方程**（对比下即知道 $P(p)$ 相当于形式微分算子里的 $P(D)$，这说明海维塞德的形式微分算子方法本质是 **L-变换**）。

为对比海维塞德的方法，默认可展开成幂级数

求解代数方程得到：$Y(p)=\dfrac{1}{P(p)}F(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{a_k}{p^k}F(p)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(\dfrac{1}{p^k}F(p)\right)$

$L$-变换存在逆变换 $L^{-1}$，$L^{-1}$ 也是线性变换。则依照定义

$$y(x)=L^{-1}[Y(p)]=L^{-1}\left[\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(\frac{1}{p^k}F(p)\right)\right]=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(L^{-1}[\frac{1}{p^k}F(p)]\right)$$

根据 **L-变换的定义**，直接验证不难得到

$$L[\int_0^x f(t)dt]=\frac{1}{p}F(p)$$

反复应用上述结论，得 $k$ 重积分对应的 **L-变换**为 $\dfrac{1}{p^k}F(p)$，于是求逆变换得到

$$L^{-1}[\frac{1}{p^k}F(p)]=\int_0^x dt\cdots\int_0^x f(t)dt$$

这正是海维塞德的形式微分算子法

$$\frac{1}{D^k}f(x)=L^{-1}[\frac{1}{p^k}F(p)]=\int_0^x dt\cdots\int_0^x f(t)dt$$

注意到 **L-变换**的每一个数学性质是有严格的数学证明的，而不再是一种形式方法。**这就揭示了形式微分算子的数学核心或本质是 Laplace 变换。**

求逆变换 $L^{-1}$ 有一般的数学公式，不过要涉及复平面上的积分。比较实用的

方法是对常见的函数建立 **L**-变换表，应用时再查表（像求积分中原函数），这很像建立原函数表方法（本质上导数表）。

抓问题的核心能力需要多阅读、多思考、多积累，养成一种数学思考习惯，慢慢的就能提高了。所谓核心，也不一定非得是文字或者数学公式。有时候一张图，或者一张带箭头的图表，也能表明问题核心，要活学活用！

# 数学的联系与统一性

因为已经贴出了 **12** 篇文章，讲述自己学习数学分析的经验，例子也足够多了。所以本文将重点放在整体思维框架上，不做技术性细节展开。具体细节可见之前的 **12** 篇文章或相关教材。

本文是自己多年学习数学的经验总结，介绍的思维模块不仅仅适用于数学分析，相信同样适用于几何与代数领域。在数学领域，内容可能不同，但思想大多是一致的。当然，既然是笔者的学习经验，肯定主观色彩较多，而且世上没有万能的方法，任何一种方法都有其局限性和适用范围。所以对本书提及的观点和方法也要辩证的看，取其精华。

首先要端正态度，对于一个定理或一个问题，我们不应该用做考试题的应试态度来对待，而应该用研究数学问题的态度来对待，尽量挖掘出新的东西，而不局限于问题中的结论本身。

笔者看到一个数学定理或问题，会下意识的提出三个问题：

**1.** 定理证明本身是构造性的，还是存在性的，证明关键地方是什么？

**2.** 定理的应用是什么，有没有几何直观或熟悉的例子可解释或验证？

**3.** 定理能否推广（一般化）？或者一般情况用反例否定掉。

比如**连续函数介值定理**，如果使用**闭区间套方法**证明，则属于**构造性**证明；如果使用**上确界方法**证明，则属于**存在性**证明。构造性方法更适合于应用问题，现实问题更重视可操作性。存在性证明通常可以避开某些技术性困难，而且结论往往更有普遍性。难说哪个方法更好，两者各有特色，需要依具体问题而定。比如，你需要解决某个实际应用问题，肯定希望用构造性方法。

**把握证明的关键或本质非常重要，可以加深对数学问题的理解。**比如

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

这个等式称为狄利克雷核（函数），在研究 **Fourier** 级数收敛性时要用到，证明也不难。粗看起来三角函数能求和还是很吃惊的，但如果考虑欧拉公式

$$e^{inx}=\cos nx+i\sin nx$$

再令 $q=e^{ix}$，由此发现上述三角函数求和本质是等比数列求和，于是豁然开朗。

有些人学习数学，只重视抽象的结论，不太重视例子，更别提应用了，这不是一个好习惯。有一个故事是关于代数几何大牛 **Deligne** 的，据说常常当人家兴致勃勃写了一黑板的高深发现时，**Deligne** 不慌不忙地站起来说：**“讲得很精彩，不过您的结论是错的！”** 弄了几次大家不禁觉得 **Deligne** 实在是神仙下凡，毕竟他再怎么强也不能刚刚接触人家的理论半个小时就比人家钻研了好几年还要更明白啊。**Deligne** 后来透露了自己的秘密，**他在听人家讲座时脑子里面准备好几个例子，看到定理推论等等都先用例子验证一番，有时候还真能发现问题。**

**Deligne** 这个案例说明了多考虑例子的重要性，同时也能培养自己的数学直觉。就数学分析来说，导数可以看做的函数切线的斜率或者求速度，积分可以看做求面积。**牛顿-莱布尼茨公式**可以看做是距离-速度关系式等等。

$$S(t_2)-S(t_1)\approx\sum_i v(t_i)\Delta t_i\to\int_{t_1}^{t_2}v(t)\,dt$$

不难理解 $S'(t)=v(t)$ 关系，即

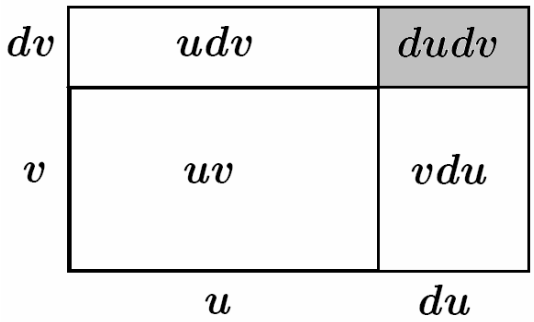
$$v(t):=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=S'(t)$$

有人觉得这些例子太俗了，层次太低。其实，了解一点数学史就知道，微积分的起源就是这些例子。大牛也是从菜鸟慢慢成长起来的。

几何直观，也是笔者注重推荐的。比如理解函数乘积的微分公式

$$d(uv)=udv+vdu$$

可以抽象出下面的面积关系，一目了然：




据科学调查，人们对几何图形的印象，要强于对公式和文字的印象。对于分析爱好者来说，几何直观也可以活跃思维，避免陷入 $\varepsilon-\delta$ 的泥潭当中。

上面的 **1** 和 **2** 属于数学中的联系性，而 **3** 属于统一性。以 **Riemann-Lebesgue** 引理为例：

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=0$$

在考察了教材中的证明后，发现证明中没有用到 $\sin x$ 的可导性质（甚至连续性），这时候可猜想对于一般的 **Riemann** 可积周期函数 $g(x+T)=g(x)$，是否有类似的结论呢？答案是肯定的：

广义 **Riemann-Lebesgue** 引理

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\,dx=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,dx\int_a^b f(x)\,dx$$

其中，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 **Riemann** 可积。

这个例子就是将结论一般化的代表。类似的推广还有将结论从低维推广到高维情形，如重积分变量代换公式

$$\int_{\varphi(E)} f(x)\,dx=\int_E f(\varphi(t))\,|\det D\varphi(t)|\,dt$$

不过，一般化的推广并不总是正确的，比如

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x+C$$

是一个初等积分，但是如果把 $x^2$ 替换成 $x^4$ 后，则

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx=\ \textbf{非初等函数}$$

第二个积分就不是初等积分了，称为**椭圆积分**。实际上将 $x^2$ 换成 $x^n$，$n\geq 3$，不定积分都不是初等函数，这种一般化推广行不通。

低维情况不能推广到高维情况的例子中，有一个著名代表来自复变函数。我们知道若 $\Omega$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 中的区域，$a\in\mathbf{C}-\Omega$，则存在 $\Omega$ 上的解析函数 $f$，不能解析延拓到 $a$ 点，比如

$$f(z)=\frac{1}{z-a}$$

这个结论看起来很自然。但是对高维 $\mathbf{C}^n$ $(n\geq 2)$ 中的情形，这个结论并不成立。实际上根据 **Hartogs** 定理，若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为区域，$K$ 是 $\Omega$ 中的紧致子集（有界闭集），且 $\Omega-K$ 是连通的。任取 $\Omega-K$ 上的解析函数 $f$，则存在一个 $\Omega$ 上的解析函数 $F$，使得 $F$ 在 $\Omega-K$ 上等于 $f$.

这个例子说明了多复变函数理论与单复变函数理论有很大的不同，不能简单的类比推广。正是这些不同，使得多复变函数方面的研究非常活跃。

上面举了好几个例子。当然，并不是所有数学定理都能同时满足以上 **1**、**2**、**3** 这三点，但在很多情况下还是可以满足的。若能带着这三个问题思考数学定理，学同样的定理，但你的思维层次就加深了。传统的数学分析以为使用的数学工具有限，得到的深刻结论较少，但若将实变函数和复变函数的一些基本工具引入后，必将大大提升认识层次。实际中，可能因为自身能力有限，问题难度可能超出自己的能力圈了，比如对某个定理的特例（如 $n=2$ 的情况），我们可以证明。但对一般的情况 $n$，可能原来的方法就不行了。对这一点不用气馁，我们可以请教牛人，或者多看看其它书。

笔者曾经被一些牛人指点过，受益匪浅。但是，绝大多数时候还是得靠自己思考，你不可能靠复制别人的路线而成功，关键还是要有自己的想法。对于上面提到的三个问题，笔者的经验之一是多读书，多读文章，同时注意**搜集**和**分析**不同的证明，很多时候对比不同的证明，你往往会有新的感悟（相对于只看一个证明来说）。

上面总结的 **1**、**2**、**3** 思考只是投石问路，数学的联系和统一性肯定不只这三点。就联系方面，一个自然的思路是考虑逆命题是否成立，比如连续函数介值定理。我们可以提问，如果函数不连续，介值定理是否成立？其实，后面学到导数介值定理就知道，介值性不是连续函数特有的。

类似的的道理，我们研究完一种运算后，自然应该看看其逆运算。比如研究完微分运算后，可以考虑其逆运算，在某些情况下（如连续函数），发现了微积分基本定理，

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

从而揭示了微分与积分之间的互逆运算关系。

注意，这种互逆运算关系不是没条件的成立。由导数介值定理可知被积函数 $f'(x)$ 不能有第一类间断点，这是必要条件。

互逆运算的类比拓展是考虑两种运算的可交换性，这是非常重要的思路。比如，数学分析中很重要的积分号下求极限问题，通常不能交换

$$\lim\circ\int_a^b \neq \int_a^b \circ \lim$$

由此引出了**控制收敛定理**。实际应用中常见的积分号下求导运算就属于这类问题。其实我们在线性代数中已经接触到了非交换问题，如矩阵乘法（通常）

$$AB \neq BA$$

物理学中著名的海森堡测不准原理，其数学本质就是算子的非交换性。

在数学分析中，联系的普遍性还体现在很多定理具有“对偶”特点，特别体现为“**连续**”**VS**“**离散**”，比如

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A \quad \textbf{VS} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}=A$$

**罗比达法则 VS Stolz 定理**

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt \quad \& \quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

**VS**

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

**Fourier 变换与逆变换 VS Fourier 级数**

这两个例子不但形式上特别像，同时也有内在联系，具体讨论见笔者以前的文章。

数学分析中的**统一性**也很明显，如微分学方面如**柯西中值定理**

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

该定理将**拉格朗日中值定理**与**罗尔中值定理**统一起来。

积分学方面的代表，则是 **Stokes 公式**

$$\int_M d\omega=\int_{\partial M}\omega$$

借助外微分工具，**Stokes** 公式将**牛顿-莱布尼茨公式**、**格林公式**和**高斯公式**统一起来。

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\partial D}Pdx+Qdy$$

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint_{\partial\Omega}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

级数方面也可以进行统一，我们在数学分析中学到了**泰勒级数**

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

这实际上只是复变函数中**洛朗级数**的特例

$$F(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

从统一性角度进行思考，不免要进行抽象，使用的数学工具也越来越深。但所得结果也更深刻了（比如 **Riemann** 积分仅仅是一种特殊的线性泛函）。因此若想使得自身数学分析水平有质的飞跃，最终必须要跳出数学分析这个框架，向实变函数、复变函数和泛函分析等领域进军。

**评注：**跨数学分支联系和统一性是 **20** 世纪数学的特征，这方面最杰出代表是著名的 **Atiyah-Singer** 指标定理，这里简单科普一下。

考虑线性算子 $D:V\to W$，其中 $V$，$W$ 是线性空间。指标定理源于研究方程 $Df=g$，其中 $g\in W$ 给定，而 $f\in V$ 未知。记**核空间**

$$\ker D=\{f\in V\mid Df=0\},$$

相应的**余核空间**（商空间）记为

$$\operatorname{coker} D=W/DV$$

如果 $\dim\ker D$ 和 $\dim\operatorname{coker} D$ 均是有限的，定义其维数差

$$\mathrm{Ind}(D)=\dim\ker D-\dim\operatorname{coker} D$$

为 $D$-**指标**。

考虑椭圆微分方程 $Df=g$（此时 $D$ 称为椭圆微分算子，是一类特殊的线性算子），数学上证明了对椭圆微分算子来说，$\dim\ker D$ 和 $\dim\operatorname{coker} D$ 均是有限维的。此时

$$\mathrm{Ind}(D)=\dim\ker D-\dim\operatorname{coker} D$$

称为**解析指标**。

**注**：核空间和余核空间是研究解的椭圆方程惟一性和存在性的重要路径。

椭圆微分算子 $D$ 可以推广到更一般的空间上，如**紧致、可定向、光滑流形** $M$ **上，在流形上考虑数学问题也是现代数学的一大特色**。前苏联大数学家盖尔芳德发现椭圆微分算子 $D$ 的解析指标是同伦不变的，于是他猜想解析指标 **Ind**($D$) 应该是一个拓扑不变量，但他不知道是哪些拓扑不变量，因而没能证明。简而言之，指标定理问题可以概括为（盖尔芳德猜想）：

**如何用流形** $M$ **本身的拓扑不变量表示解析指标 Ind**($D$)？

经过数学家 **Atiyah** 和 **Singer** 经过努力证明了下面：

**Atiyah-Singer 指标定理**（紧支上同调形式）：

$$\mathbf{dimker}\, D - \mathbf{dimcoker}\, D = \int_{T^*M} \mathbf{Ch}[\sigma(D)] \cdot \mathbf{Td}(TM \otimes \mathbf{C})$$

其中，$T^*M$ 表示余切丛，$TM \otimes \mathbf{C}$ 表示复化切丛，**Ch** 称为**陈特征**（纪念几何大师陈省身陈老的杰出贡献），$\sigma(D)$ 称为主象征，**Td** 称为 **Todd** 类。

上面指标定理等式右边非常复杂，难怪数学大师盖尔芳德没想出来。右边这些量虽然复杂，但对于拓扑学家来说，都是很熟悉的拓扑不变量（这里用 **de Rham** 上同调形式表示）。

因为**陈类**是流形上的拓扑不变量，由 **de Rham** 定理知陈类可由微分形式表示，而陈特征和 **Todd** 类都可以表示成陈类的多项式，**用** $\{Chern\text{-}Class\}$ **表示与陈类有关的多项式**，所以指标定理可写成下面的底流形上**“科普形式指标定理”**（这种科普写法来源于张伟平院士）：

$$\mathbf{dimker}\, D - \mathbf{dimcoker}\, D = \int_M \{Chern\text{-}Class\}$$

**注**：读者可以把 $\{Chern\text{-}Class\}$ 想象为一大堆复杂的**微分形式**，上述公式表述方法比较直观，又不失数学严密性，还突出了陈省身（陈老）的数学贡献。网上有张伟平院士关于《**Atiyah-Singer** 指标定理》的科普讲座（第 **31** 讲，见下方链接），感兴趣的读者可以去看看。

http://www.nim.nankai.edu.cn/activites/lecture_2007.htm

这里不可能去解释上面一大堆抽象的数学概念，不过可以科普下指标定理

的证明思想，想法比较有代表性。

我们定义“拓扑指标”$t\text{-}ind$ 为

$$t\text{-}ind = \int_{T^*M} \mathrm{Ch}[\sigma(D)]\cdot \mathrm{Td}(TM\otimes \mathbf{C})$$

**Atiyah-Singer** 指标定理说明我们用两种截然不同的方法得到的指标是相等的，即**解析指标＝拓扑指标**，或 $\mathrm{Ind}(D) = t\text{-}ind$．注意到前者来自于分析领域，后者来自于拓扑领域，**指标定理把分析和拓扑两大数学领域联系到一起。**

证明方法采用的是**“公理化”**思路，先建立两条**“指标公理**（拓扑思路）**”**，然后证明满足这两条公理的指标若存在必惟一。接下来验证**拓扑指标** $t-ind$ 满足公理，这就证明了满足公理的指标存在性。最后，只需要验证解析指标 $\mathrm{Ind}(D)$ 也满足这两条公理（技术上最大的困难所在）即可，**由惟一性**

$$\mathrm{Ind}(D) = t\text{-}ind$$

**这种公理化的证明思路值得借鉴。**

指标定理不仅体现了数学的联系性，也体现了数学的统一性。在此之前，人们已经证明了 **Gauss-Bonnet** 定理、**Riemann-Roch** 定理、符号差定理，这都是数学中大名鼎鼎的定理。而指标定理的问世，直接将上述定理变为了特例，这就是统一性的威力。

最后科普一段故事，讲述的是指标定理是如何问世的。**Atiyah** 是一个拓扑学家，最初发现所谓 **Spin** 流形的 **A-亏格**是整数，始终不解。于是他向分析学家 **Singer** 请教，**Singer** 起初也想不明白，无法解释。后来有一天 **Singer** 来了灵感，发现 **A-**亏格是 **Dirac** 算子（粗略地说，可以看成 **Laplace** 算子的平方根）的解析指标，因而 **Atiyah** 和 **Singer** 开始钻研 **Dirac** 算子。后来 **Smale**（证明 **4** 维以上 **Poincare** 猜想那位大师）路过牛津，与 **Atiyah** 聊起彼此工作时，**Atiyah** 提到了那个问题。**Smale** 说前几天他看到盖尔芳德的一篇关于椭圆微分算子指标的文章，建议 **Atiyah** 去看看。**Atiyah** 后来感慨到，需要突破 **Dirac** 算子的局限而考虑更广泛的椭圆算子，这才有了 **Atiyah-Singer** 指标定理。

最初指标定理是利用配边理论证明的，但 **Atiyah** 觉得方法不够自然，而且技巧性太强。**Atiyah** 冥思苦想，终于发展了所谓**拓扑** $K-$**理论**，有了这门工具作为铺垫之后，指标定理的证明就水到渠成了。对于余切从 $T^*M$，存在一个 $K-$群，记为 $K(T^*M)$，由其中可以**自然生成拓扑指标** $t-ind$，于是指标定理的整

体证明思路可浓缩概括为下列**交换图表**：

$$
\begin{array}{ccc}
\{elliptic\text{-}D\} & \xrightarrow{\text{Ind}} & \mathbf{Z} \\
\sigma(D)\downarrow & & \Updownarrow \\
K(T^{*}M) & \xrightarrow{t\text{-}ind} & \mathbf{Z}
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{Ind}(D) = t\text{-}ind\big(\sigma(D)\big)$$

需要指出，**拓扑** $K-$**理论**的应用范围不仅仅是指标定理，指标定理只是该理论的副产品。

# 《博士数学论坛》风雨十年路——站长内心感悟

一、风雨十年路

十年了，博士数学论坛走过来了，经历过，收获过，痛失过，幸福过，我说：我来了，你还在么，老朋友？

Aloft，幻星，贝儿，蓝戈等等很多今天都记不起的最初一批论坛元老，感谢你们当初的支持，今天也许你们不再来论坛了，但你们当中的每一个人我都深深的记在脑海里。

人生有几个十年？网站发展到今天，凝聚了太多人的心血和支持，我们一步步走来，还会坚定的一步步走下去！

但在这值得欢庆的日子，站长同时也怀有深深的忧虑。

二、未来的担忧

还有第二个，第三个。。。十年么？

维护网站的艰辛自不必表，缺钱缺人缺技术，对于个人网站来说，处处拮据。看到过《丁香园》的站长"天天"的一个访谈。力主从学术网站转型商业化，历程真的很艰辛。当然我们的小站没法和这些动辄上百万用户的大站相比，但麻雀虽小，五脏俱全，从技术，到美工，到运营，到宣传，处处都耗费人的精力，单凭站长一个人的精力，我不确定是否能有一个再一个的十年。

搜索引擎以及巨无霸网站的垄断更加加剧了未来的这种不确定性。中小网站的创意，创新很容易被大网站学去，而且人家拥有更多的客户和流量，服务稳定性、速度都优于中小网站。一旦大网站的兼并和逐鹿结束，腾出手来就会让这些中小网站倒闭。搜索引擎对网站挑剔的收录以及收费服务，认证服务，让中小网

站怯步，高门槛迈不过去，不收录你的任何内容，客户从搜索引擎无法找到你网站内容，这是温水煮青蛙的慢性毒药。

网络环境的不确定性。2009 年末，我们网站的服务器全部被机房清空封闭，没有任何说明。论坛需要办理各种官方证件，绝不是一个简单的域名备案能搞定的，一旦严查，大部分个人网站均不合格。去办理这些许可证？资金没有上百万千万，不要去谈。论坛没有人 24 小时值守？这就不符合规定，关闭！等等，这些都加剧了我们对未来的担忧。服务器搬到国外？嗯，网速慢的你都忍受不了，算了吧。

三、展望与感恩

值得庆幸的是在极端的垂直行业细分的领域，大网站巨头还暂时看不上这点蚊子肉，我们还在喘息。

感恩的是论坛多年得到众多忠心用户的支持，不抛弃不放弃，论坛恢复的第一时间就来注册，发帖支持，说真的，有你们的支持，我们才有动力走下去，感谢你们的十年默默支持！

站长呼呼相信，《博士数学论坛》会有一代又一代的数学人把旗帜扛下去，星星之火一定会燎原，我们会默默的等你来接过我们手中的重担，你有这个信心么？

站长期待你的来信 www@math.org.cn

博士家园几经改版，原来的样子你还记得吗？

我把能记录下来的历史瞬间，整理成相册，共忆当年的美好时光。。。

博士家园